MINISTERUL EDUCAŢIEI, CULTURII ŞI CERCETĂRII
AL REPUBLICII MOLDOVA
UNIVERSITATEA DE STAT "DIMITRIE CANTEMIR"

Cu titlu de manuscris
CZU 517.925

DASCALESCU ANATOLI

INTEGRABILITATEA SISTEMELOR DIFERENŢIALE CUBICE CU DREPTE ŞI CUBICE INVARIANTE

111.02. ECUAŢII DIFERENŢIALE

Teză de doctor în ştiinţe matematice

Conducător ştiinţific: **Cozma Dumitru,**
doctor habilitat în ştiinţe matematice,
conferenţiar universitar

Autor:

CHIŞINĂU, 2019

CUPRINS

ADNOTARE

Dascalescu Anatoli, "Integrabilitatea sistemelor diferenţiale cubice cu drepte şi cubice invariante". Teză de doctor în ştiinţe matematice. Chişinău, 2019

Structura tezei: teza constă din introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie din 150 titluri, 135 pagini de text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 15 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte-cheie: sistem diferenţial cubic, curbă algebrică invariantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux, consecutivitate centrică, problema ciclicităţii.

Domeniul de studiu: teoria calitativă a sistemelor dinamice, integrabilitatea sistemelor diferenţiale polinomiale.

Scopul lucrării: determinarea condiţiilor de existenţă a centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă.

Obiectivele cercetării: determinarea condiţiilor de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemul cubic cu punct singular de tip centru sau focar; studierea integrabilităţii sistemelor; rezolvarea problemei centrului şi problemei ciclicităţii în prezenţa a două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: a fost rezolvată problema centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă; a fost stabilită ciclicitatea punctului singular de tip centru sau focar; au fost determinate consecutivităţile centrice. A fost demonstrat că orice sistem cubic ce are punct singular de tip centru, două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, este Darboux integrabil sau reversibil.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în stabilirea unor relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală, ceea ce a contribuit la dezvoltarea metodei de integrabilitate Darboux, fapt ce a permis determinarea unor noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Semnificaţia teoretică a lucrării: a fost dezvoltată metoda de investigare a problemei centrului care se bazează pe relaţiile dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea Darboux.

Valoarea aplicativă a lucrării: pentru sistemele diferenţiale cubice au fost obţinute rezultate noi ce ţin de problema centrului şi ciclicităţii, care reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: rezultatele obţinute în teză pot fi aplicate în investigaţiile problemei integrabilităţii şi a problemei ciclurilor limită pentru sistemele diferenţiale polinomiale; pot servi drept suport pentru tezele de master şi unele cursuri opţionale universitare ţinute studenţilor şi masteranzilor; pot fi folosite în studiul unor modele matematice ce descriu procese sociale şi naturale.

АННОТАЦИЯ

Даскалеску Анатолий, "Интегрирование кубических дифференциальных систем с алгебраическими инвариантными кривыми первого и третьего порядка". Диссертация доктора математических. Кишинэу, 2019

Структура работы: введение, четыре главы, выводы и рекомендации, библиография из 150 наименований, 135 страниц основного текста. Полученные результаты были опубликованы в 15 научных работах.

Ключевые слова: кубическая дифференциальная система, алгебраическая инвариантная кривая, проблема центра, интегрируемость в смысле Дарбу, центрическая последовательность, проблема цикличности.

Область исследования: качественная теория динамических систем, интегрируемость полиномиальных дифференциальных систем.

Цель работы: определение условий существования центра для кубической дифференциальной системы с особой точкой типа центра или фокуса при наличии двух инвариантных прямых и инвариантной кривой третьего порядка.

Задачи исследования: нахождение условий существования двух инвариантных прямых и инвариантной кривой третьего порядка в кубической дифференциальной системы с особой точкой типа центра или фокуса; определение условий интегрируемости систем; решение проблемы центра и проблемы цикличности для кубических систем с двумя инвариантными прямыми и инвариантной кривой третьего порядка.

Новизна и научная оригинальность: для кубической дифференциальной системы с двумя инвариантными прямыми и инвариантной кривой третьего порядка была решена проблема центра и была установлена цикличность особой точки типа центра или фокуса. Было доказано, что любая кубическая система с особой точкой типа центра при наличии двух инвариантных прямых и инвариантной кривой третьего порядка интегрируема в смысле Дарбу или имеет ось симметрии.

Главная решенная научная задача состоит в установлении эффективных соотношении между алгебраическими инвариантными кривыми, фокусными величинами и локальной интегрируемостью, что способствовало развитию метода интегрируемости в смысле Дарбу, что позволило получить новые необходимые и достаточные условия центра для кубических систем с двумя инвариантными прямыми и инвариантной кривой третьего порядка.

Теоретическая значимость работы: был разработан метод исследования проблемы центра, основанный на сооотношениях между алгебраическими инвариантными кривыми, фокусными величинами и интегрируемостью в смысле Дарбу.

Практическая значимость работы: были полученны новые результаты по проблеме центра и проблеме цикличности, которые являются важным шагом в решении 16-й проблемы Гильберта о предельных циклах.

Внедрение научных результатов: полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении проблемы интегрируемости и проблемы предельных циклов полиномиальных систем, при разработке тем магистерских работ и некоторых спецкурсов для физико-математических специальностей, при исследовании некоторых математических моделей, описывающих социальные и природные процессы.

ANNOTATION

Dascalescu Anatoli, "Integrability of cubic differential systems with invariant straight lines and invariant cubics".
Doctoral Thesis in Mathematical Sciences. Chişinău, 2019

Thesis structure: introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, bibliography of 150 titles, 135 pages of main text. The obtained results were published in 15 scientific papers.

Keywords: cubic differential system, invariant algebraic curve, the problem of the center, Darboux integrability, center sequence, the problem of cyclicity.

Domain of research: qualitative theory of dynamical systems, integrability of polynomial differential systems.

Aim of the research: to determine the center conditions for the cubic differential system with two distinct invariant straight lines and one irreducible invariant cubic.

Objectives of the research: to obtain the conditions for the existence of two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic for the cubic differential system with a singular point of a center or a focus; to study the integrability of the systems; to solve the problem of the center and the problem of cyclicity for the cubic systems with two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic.

Novelty and scientific originality: the problem of the center, the problem of cyclicity and the problem of center sequences were solved for cubic differential systems with two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic. It was proved that every cubic differential system with a center, having two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic, is Darboux integrable or reversible.

The main scientific problem solved consists in establishing of some efficient relations between invariant algebraic curves, focus quantities and local integrability, which contributed to the development of the Darboux integrability method. This made possible to obtain new sets of necessary and sufficient center conditions for cubic differential systems with two invariant straight lines and one invariant cubic.

The theoretical significance of the work: it was elaborated an efficient method in solving the problem of center based on relations between the existence of algebraic invariant curves, focus quantities and Darboux integrability.

The practical value of the work: the results obtained for cubic differential systems concerning the problem of the center and the problem of cyclicity represent an important step in solving the 16th Hilbert problem about limit cycles.

Implementation of the scientific results: the obtained results can be applied in investigations of the problem of integrability and the problem of limit cycles for polynomial differential systems; can serve as support for Master Thesis and some optional university courses for students and master students; can be used in the study of mathematical models which describe some social and natural processes.

INTRODUCERE

Teza de faţă se referă la teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. În lucrare este studiată integrabilitatea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu punct singular de tip centru sau focar ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Actualitatea şi importanţa problemei abordate. Ştiinţa modernă a arătat că studiul fenomenelor din natură implică crearea unor modele matematice care prin formulare să cuprindă principalele caracteristici ale fenomenelor. Aceasta a condus la faptul că modelul cel mai potrivit pentru fenomenele evolutive poate fi reprezentat printr-un sistem de ecuaţii diferenţiale. Astfel, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea s-au pus bazele teoriei moderne a stabilităţii, prin lucrările matematicianului rus A.M. Liapunov (1857-1918) care, în teza sa de doctorat (1892), a definit principalele concepte de stabilitate. Rezultate importante în acest domeniu au mai fost obţinute de H. Poincaré şi J. Maxwell în procesul de studiu a stabilităţii mişcării corpurilor cereşti. Un salt calitativ în teoria ecuaţiilor diferenţiale a fost secolul al XX-lea, prin introducerea unor metode noi: metoda gradului topologic, teoria bifurcaţiei [3], etc.

O problemă importantă a teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale este *problema ciclităţii*, numită şi problema locală a 16-a a lui Hilbert, care constă în estimarea ciclurilor limită ce pot apărea la bifurcaţii din puncte singulare de tipul centru sau focar. Această problemă face parte din lista problemelor formulate de Hilbert [67] la începutul secolului al XX-lea şi este parte componentă a problemei a 16-a a lui Hilbert, care nu este rezolvată până-n prezent. Un pas semnificativ în rezolvarea problemei ciclităţii îl constituie rezolvarea problemei deosebirii centrului de focar, numită, în continuare, *problema centrului*.

Studiul problemei centrului îşi are începutul în lucrările clasice ale lui Poincaré [90] şi Lyapunov [85], unde a fost arătat că prezenţa centrului într-un sistem diferenţial analitic poate fi stabilită prin rezolvarea unui sistem infinit de ecuaţii polinomiale în raport cu coeficienţii sistemului diferenţial. Aceste ecuaţii polinomiale sunt numite condiţii de centru, iar însăşi polinoamele - *mărimi focale* (sau *constante Lyapunov*).

Ţinând cont de teorema lui Hilbert despre baza finită, sistemul infinit de ecuaţii polinomiale este echivalent cu un sistem finit, adică există aşa un număr finit de mărimi focale astfel încât anularea lor implică anularea tuturor. Prin urmare, condiţiile necesare de centru pot fi găsite prin rezolvarea acestui sistem cu un număr finit de ecuaţii polinomiale.

Cu toate că problema centrului a fost formulată la sfârşitul secolului al XIX-lea, actualmente ea este complet rezolvată doar pentru: sistemele diferenţiale pătratice (Dulac [54], Kapteyn [70], Frommer [58], Saharnikov [110], Sibirsky [117,118], Lunkevich şi Sibirsky [83], Malkin [87], Chengzhi [78], Schlomiuk [112, 113], Żoladek [146]); sistemele diferenţiale cubice simetrice (Malkin [88], Lunkevich şi Sibirsky [84], Sibirsky [121, 123], Rousseau şi Schlomiuk [101], Żoladek [144]); sistemul diferenţial Kukles (Kukles [76], Cherkas [16], Christopher şi Lloyd [19], Şubă [127], Rousseau şi Schlomiuk [102], Sadovskii [104]); sistemul bidimensional complex quartic Lotka-Volterra (Ferčec, Giné, Yirong şi Romanovski [10]); sistemul bidimensional complex quintic Lotka-Volterra (Gine şi Romanovski [61]), ş.a.

Cercetarea calitativă a sistemelor pătratice cu punct singular de tip centru a fost realizată de Vulpe [141], iar exprimarea prin invarianţi algebrici a condiţiilor de centru pentru sistemele cubice simetrice a fost efectuată de Sibirschi [122], Sibirschi şi Vulpe [142].

În caz general, problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice ce conţin în acelaşi timp omogenităţi pătratice şi omogenităţi cubice, nu este complet rezolvată până-n prezent. Condiţiile necesare şi suficiente ca un punct singular cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice pur imaginare să fie centru au fost obţinute doar în unele cazuri particulare: pentru sistemele cubice cu infinitul degenerat (Kompel [71], Şubă [128], Chavarriga şi Gine [12]), pentru sistemele cubice cu părţile drepte de o formă specială (Daniliuk şi Şubă [45,46], Romanovski şi Şubă [99], Lloyd, Pearson şi Romanovski [82]), pentru un sistem cubic ce conţine nouă parametri şi care poate fi redus prin transformări la un sistem de tip Liénard (Bondar şi Sadovskii [6], Sadovskii şi Shcheglova [107]), pentru sistemele cubice care posedă patru drepte invariante (Şubă şi Cozma [26,27]), pentru sistemele cubice ce au trei drepte invariante (Şubă şi Cozma [133–135]), pentru sistemele cubice care posedă două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă (Cozma [28–31]).

În [2] Baltag a studiat unele sisteme cubice ce au integrală primă de forma $F_4^{\beta_1} F_6^{\beta_2} = C$, unde F_4 şi F_6 sunt polinoame de gradele patru şi şase, respectiv, iar în [149] Županović a cercetat unele clase de sisteme cubice ce au integrală primă de forma $F_1^2 F_3 = C$, unde F_1 şi F_3 sunt polinoame de gradele unu şi trei, respectiv. Pentru aceste sisteme au fost găsite condiţiile de existenţă a centrului şi a fost efectuată cercetarea calitativă pe discul Poincaré.

Pentru unele clase de sisteme diferenţiale polinomiale problema centrului a fost studiată în monografiile matematicienilor Sadovskii [105], Romanovski şi Shafer [98], Christopher şi Li [22], Cozma [31], Zhang [143], Popa şi Pricop [92]. Rezolvarea problemei generalizate a centrului (Ciobanu [25]), a fost obţinută de Popa şi Pricop [91].

Problema ciclicităţii punctului singular de tip centru sau focar, pentru unele clase de sisteme diferenţiale cubice, a fost examinată în lucrările autorilor: Żołądek [144], Bothmer şi Kröker [9], Yu şi Han [150], Romanovski şi Shafer [98], Levandovskyy, Pfister şi Romanovski [77], Gaiko [59], Li, Liu şi Yang [79], Ferčec şi Mahdi [57], ş.a.

În lucrarea lui Poincaré [90] se arată, că dacă un sistem diferenţial, pentru care $O(0,0)$ este punct singular de tip centru sau focar, are axă de simetrie ce trece prin $O(0,0)$, atunci $O(0,0)$ este centru. Żołądek [147] a generalizat noţiunea de simetrie, numind-o reversibilitate, şi a clasificat sistemele cubice cu centru şi cu proprietatea de reversibilitate. El propune trei mecanisme generale de soluţionarea a problemei centrului [148]: 1) căutarea integralei prime de tipul Darboux; 2) căutarea integralei prime de tipul Darboux–Schwarz–Christoffel; 3) stabilirea reversibilităţii raţionale.

Un algoritm de depistare a sistemelor diferenţiale polinomiale reversibile a fost propus de Romanovski [100], iar interdependenţa dintre reversibilitate şi problema centrului a fost studiată de către Teixeira şi Jiazhong [138]. Unele transformări biliniare ce reduc sistemul dat la un sistem cu axă de simetrie, studiate de Llyod şi Pearson [81] şi Cozma [32], au permis obţinerea condiţiilor de existenţă a centrului pentru unele sisteme cubice.

O metodă eficientă de studiere a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale cu soluţii algebrice este metoda Darboux de integrare. În [44] Darboux arată că această metodă este aplicabilă, dacă sistemul posedă un număr suficient de soluţii algebrice.

Construirea integralei prime de tip Darboux pentru un sistem diferenţial polinomial cu punct singular de tip centru sau focar, din soluţiile lui algebrice, asigură existenţa centrului în acest punct. Pentru sistemele diferenţiale pătratice, Schlomiuk [114] a demonstrat pentru prima dată aplicativitatea metodei Darboux în toate cazurile de existenţă a centrului.

Mulţi matematicieni au folosit cu succes metoda Darboux de integrare la rezolvarea problemei centrului pentru unele clase de sisteme cubice cu puncte singulare de tip centru şi cu un anumit număr de soluţii algebrice: Şubă [128] a determinat condiţiile de existenţă a centrului pentru un sistem cubic cu infinitul degenerat folosind drepte invariante, iar în [129] condiţiile de centru au fost detereminate pentru un sistem cubic prin folosirea dreptelor invariante şi a factorilor exponenţiali; Şubă şi Cozma au obţinut condiţiile de existenţă a centrului pentru sistemele cubice care au patru drepte invariante [26,27] şi care au trei drepte invariante [133–135]; Cozma a determinat condiţiile de existenţă a centrului pentru sistemele cubice care au două drepte invariante şi o conică invariantă [28–31]; Hill, Lloyd şi Pearson [64] au obţinut condiţiile de existenţă a centrului pentru un sistem cubic de tip Kukles folosind soluţii algebrice de gradele unu, doi şi trei; Lloyd, Pearson şi Romanovski [82] au determinat condiţiile de centru pentru un sistem cubic prin folosirea dreptelor invariante.

Problema integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale cu puncte singulare de tip centru şi cu un anumit număr de soluţii algebrice a fost examinată în lucrările: Şubă [130], Kooij şi Christopher [75], Chavarriga, Giacomini, Giné [13], Christopher, Llibre, Pantazi şi Zhang [24], Ferčec, Giné şi Romanovski [10], Giné şi Romanovski [61], Cao, Llibre şi Zhang [11], Dukaric şi Giné [53].

O nouă abordare a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale a fost realizată în lucrările Şubă şi Cozma [26, 33, 130], prin luarea în considerare, concomitent, a curbelor algebrice invariante, mărimilor Lyapunov şi a integrabilităţii Darboux. A fost propusă o direcţie nouă de cercetare a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale şi anume, *problema determinării consecutivităţilor centrice*: pentru fiecare număr natural dat $n,\ n \geq 3$, să se determine toate consecutivităţile centrice ale sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n ce au puncte singulare de tip centru sau focar.

În lucrarea [33] Cozma a rezolvat problema consecutivităţilor centrice pentru sistemele diferenţiale cubice în cazurile când sistemul are: patru drepte invariante; trei drepte invariante; două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă.

În teza de faţă sunt prezentate rezultatele studiului problemei centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar ce posedă două drepte invariante de forma $l_1 \equiv 1 + a_1x + b_1y = 0$, $l_2 \equiv 1 + a_2x + b_2y = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă de forma $\Phi \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0$. La rezolvarea problemei centrului sunt dezvoltate două mecanisme de bază: metoda de integrabilitate Darboux şi metoda reversibilităţii. În lucrare sunt formulate următoarele două probleme fundamentale:

Problema 1. *Să se determine condiţiile de existenţă a două drepte invariante distincte şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemele diferenţiale cubice.*

Problema 2. *Să se determine toate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.*

Problemele 1 şi 2 sunt soluţionate în Capitolele 2, 3 şi 4.

Scopul lucrării: determinarea condiţiilor de existenţă a centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă.

Obiectivele cercetării:

– determinarea condiţiilor de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar;

– studierea integrabilităţii sistemelor diferenţiale cubice în prezenţa a două drepte invariante şi a unei cubice invariante;

– rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă;

– stabilirea ciclicităţii punctului singular de tip centru sau focar în sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Ipoteza cercetării. Soluţionarea problemei centrului pentru sistemul diferenţial cubic, cu două drepte invariante şi o cubică invariantă, va fi realizată dacă: vor fi stabilite relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală; va fi dezvoltată metoda de integrabilitate Darboux; vor fi determinate consecutivităţile centrice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Obiectivele formulate au contribuit la fundamentarea conceptelor ştiinţifice. În premieră, pentru sistemele diferenţiale cubice sunt determinate noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului, care reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită.

Metodologia cercetării ştiinţifice. Cercetările ştiinţifice realizate în teză sunt bazate pe metodele teoriei calitative a sistemelor dinamice, metodele algebrice de calcul computaţional, metodele de parametrizare a curbelor algebrice. Problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă curbe algebrice invariante este cercetată prin folosirea metodei de integrabilitate Darboux şi a reversibilităţii sistemului diferenţial.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. A fost rezolvată problema centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar, care posedă două drepte invariante $l_1 = 0,\ l_2 = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă $\Phi = 0$. Astfel:

– au fost obţinute condiţii noi de existenţă a centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă;

– a fost demonstrată integrabilitatea Darboux a sistemului diferenţial cubic cu punct singular de tip centru în cazurile când soluţiile algebrice formează un fascicol de curbe sau ele se află în poziţia generică;

– au fost determinate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă;

– au fost obţinute rezultate noi în problema ciclicităţii pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în stabilirea unor relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală, ceea ce a contribuit la dezvoltarea metodei de integrabilitate Darboux, fapt ce a permis determinarea unor noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Semnificaţia teoretică a lucrării: a fost dezvoltată metoda de investigare a problemei centrului care se bazează pe relaţiile dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea Darboux.

Valoarea aplicativă a lucrării: pentru sistemele diferenţiale cubice au fost obţinute rezultate noi ce ţin de problema centrului şi ciclicităţii, care reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– condiţiile de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar;

– consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante $l_1 \equiv 1 + a_1x + b_1y = 0$, $l_2 \equiv 1 + a_2x + b_2y = 0$ distincte şi o cubică invariantă ireductibilă $\Phi \equiv x^2+y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3 = 0$: $(l_1||l_2, \Phi;\ N = 2)$; $(l_1, l_2, l_1 \nparallel l_2, \Phi;\ N = 3)$;

– condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă;

– demonstraţia integrabilităţii Darboux sau a reversibilităţii sistemelor cubice cu singularităţi de tip centru în cazul a două drepte invariante şi a unei cubice invariante.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute în teză:

– pot fi aplicate în investigaţiile problemei integrabilităţii şi a problemei ciclurilor limită pentru sistemele diferenţiale polinomiale;

– pot fi folosite în studiul unor modele matematice ce descriu procese naturale şi sociale: dinamica populaţiilor, epidemiologie, ecologie, imunologie, fizica plasmei, fizica laserului, reţelele neuronale ş.a.;

– pot servi drept suport pentru tezele de master şi unele cursuri opţionale universitare ţinute studenţilor şi masteranzilor la facultăţile cu profil real sau tehnic.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele ştiinţifice expuse în teză au fost examinate şi aprobate la seminarele ştiinţifice: "Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre" din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (13 decembrie 2016, 5 aprilie 2017, 29 ianuarie 2019), Chişinău; "Ecuaţii Diferenţiale" din cadrul Facultăţii Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 17 ianuarie, 2016.

Rezultatele ştiinţifice au fost prezentate în secţiile conferinţelor ştiinţifice:

– International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education", June 24–26, 2019, Chişinău.

– International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19 – 21, 2018, Bălţi;

– International Conference "Modern problems of mathematics and its applications in natural sciences and information technologies", September 17–19, 2018, Chernivtsi, Ukraine.

– The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2018), Chişinău, Tehnical University of Moldova, September 20 – 23, 2018.

– The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chişinău, June 28 – July 2, 2017.

– The 25th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), Iaşi, România, September 14 – 17, 2017.

– Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", 15 iunie, 2017, Chişinău;

– International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education", June 23–26, 2016 Chişinău;

– Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", 25 mai, 2016, Chişinău.

– Sesiunea naţională de comunicări ştiinţifice a studenţilor, Universitatea de Stat din Moldova, 21–22 aprilie, 2016, Chişinău;

Publicaţiile la tema tezei. Rezultatele de bază ale cercetărilor au fost publicate în 15 lucrări, 4 articole ştiinţifice recenzate şi publicate în 3 ţări (Moldova, România, Ucraina), 3 articole în culegeri de articole recenzate, 8 comunicări şi rezumate ale conferinţelor internaţionale; 6 lucrări sunt publicate fără coautori (inclusiv 4 articole).

Volumul şi structura tezei. Teza este scrisă în limba română şi constă din: introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie (150 titluri), 135 pagini text de bază, adnotarea în limbile română, rusă şi engleză.

Cuvinte-cheie: sistem diferenţial cubic, curbă algebrică invariantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux, consecutivitate centrică, problema ciclicităţii.

Domeniul de studiu: teoria calitativă a sistemelor dinamice, integrabilitatea sistemelor diferenţiale polinomiale.

Sumarul capitolelor tezei:

În **Introducere** este prezentată actualitatea şi importanţa cercetărilor efectuate, motivaţia cercetărilor întreprinse, scopul şi obiectivele tezei, noutatea şi originalitatea ştiinţifică, problemele ştiinţifice soluţionate, semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării, rezultatele înaintate spre susţinere, precum şi aprobarea lor.

În **Capitolul 1, Problema centrului şi a integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale**, format din 6 secţiuni, sunt enunţate rezultatele clasice şi recente ce ţin de domeniul de cercetare, scopul şi obiectivele tezei. Acestea se referă la problema centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale, problema de integrabilitate a sistemelor diferenţiale polinomiale cu soluţii algebrice şi problema locală a 16-a a lui Hilbert. Sunt descrise două mecanisme principale folosite la rezolvarea problemei centrului: metoda de integrabilitate Darboux şi metoda reversibilităţii. În lucrarea de faţă, pentru sistemele diferenţiale cubice cu punct singular de tip centru sau focar şi care au soluţii algebrice sunt formulate două probleme fundamentale de a fi rezolvate.

În **capitolul 2, Sisteme cubice cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă**, format din 4 secţiuni, se studiază problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante paralele distincte şi o cubică invariantă ireductibilă. Se demonstrează că punctul singular de tip centru sau focar este centru dacă şi numai dacă primele două mărimi Lyapunov se anulează. Se artă că sistemele diferenţiale cubice, cu punct singular de tip centru, care posedă două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă sau sunt Darboux integrabile, sau sunt reversibile.

În **capitolul 3, Sisteme cubice cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă**, format din 5 secţiuni, se studiază problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă. Se demonstrează că punctul singular de tip centru sau focar este centru dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează. Se artă că sistemele diferenţiale cubice, cu punct singular de tip centru, care posedă un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă sunt Darboux integrabile.

În **capitolul 4, Sisteme cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică**, format din 8 secţiuni, se studiază problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică. Se demonstrează că punctul singular de tip centru sau focar este centru dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează. Se arată că sistemele diferenţiale cubice, cu punct singular de tip centru, care posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică sunt Darboux integrabile.

La sfârşitul tezei sunt expuse concluziile corespunzătoare rezultatelor obţinute şi recomandări.

1. PROBLEMA CENTRULUI ŞI A INTEGRABILITĂŢII SISTEMELOR DIFERENŢIALE POLINOMIALE

1.1. Problema centrului şi focarului

Teoria calitativă a sistemelor autonome de ecuaţii diferenţiale îşi are apariţia la sfârşitul secolului al XIX-lea şi începutul secolului XX, când a devenit clar că clasa sistemelor diferenţiale, integrabile în funcţii elementare, este destul de îngustă. În lucrările lui Poincare [90] şi Lyapunov [85] a fost lansată ideea de a cerceta comportarea traiectoriilor sistemelor autonome fără a recurge la integrarea lor. Această idee s-a dovedit a fi destul de efectivă la studierea sistemelor autonome în plan

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \ \frac{dy}{dt} = Y(x,y), \tag{1.1}$$

cu funcţiile $X(x,y)$ şi $Y(x,y)$ analitice.

Topologic, sistemul (1.1) poate avea trei feluri de traiectorii: traiectorii de tip punct, numite puncte singulare (puncte de echilibru); traiectorii închise şi traiectorii drepte. Cunoaşterea traiectoriilor puncte şi a celor închise permit să fie construit tabloul de fază al comportării tuturor traiectoriilor sistemului. Dintre traiectoriile de tip punct nu sunt complet studiate doar punctele singulare ale căror rădăcini ale ecuaţiei caracteristice sunt pur imaginare, iar în cazul traiectoriilor închise rămân a fi studiate traiectoriile închise şi izolate, numite cicluri limită.

În prezent, o atenţie sporită li se acordă sistemelor diferenţiale polinomiale, cauzată de numeroasele aplicaţii în modelarea matematică din diverse discipline fundamentale şi aplicative, studiului cărora le sunt dedicate un număr impunător de lucrări ştiinţifice.

Printr-un sistem diferenţial polinomial vom înţelege un sistem bidimensional de ecuaţii diferenţiale de forma

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \ \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1.2}$$

unde variabila independentă t (timpul) şi variabilele dependente x şi y se consideră reale, iar $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ reprezintă nişte elemente din inelul polinoamelor asupra câmpului de numere reale, adică P, $Q \in \mathbb{R}[x,y]$. Cu $n = \max\{deg\, P, deg\, Q\}$ vom nota gradul sistemului polinomial (1.2) şi vom presupune că polinoamele $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt relativ prime în $\mathbb{R}[x,y]$. Dacă $n = 2$, atunci sistemul (1.2) se numeşte sistem diferenţial pătratic, iar dacă $n = 3 -$ sistem diferenţial cubic.

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct singular al sistemului (1.2), adică $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Fără a restrânge generalitatea putem considera că punctul singular (x_0, y_0) coincide cu originea sistemului de coordonate, adică $x_0 = y_0 = 0$. Să considerăm liniarizarea sistemului (1.2) în $O(0,0)$

$$\frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y, \quad \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y. \tag{1.3}$$

Una dintre cele mai importante probleme care nu este rezolvată până-n prezent pentru sistemele diferenţiale polinomiale este: *în care condiţii sistemul iniţial (1.2) şi sistemul liniarizat (1.3) au aceeaşi comportare calitativă şi structură topologică în vecinătatea punctului singular* $O(0,0)$?

Problema dată a fost soluţionată cu excepţia cazului când punctul singular este de tip centru sau focar. Dacă pentru sistemul liniarizat (1.3) rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\lambda^2 - (a_{10} + b_{01})\lambda + a_{10}b_{01} - b_{10}a_{01} = 0$$

au părţile reale nenule ($Re\lambda_j \neq 0, j = 1,2$), atunci punctul singular $O(0,0)$ este de tip hiperbolic, iar portretele de fază locale ale sistemului (1.2) şi ale sistemului liniarizat (1.3) sunt topologic aceleaşi.

Situaţia este de altă natură când rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt pur imaginare $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, $\beta \neq 0$, $i^2 = -1$. În acest caz, punctul singular $O(0,0)$ este de tip *centru* pentru sistemul liniarizat (1.3) şi de tip *centru sau focar* pentru sistemul neliniar (1.2). Printr-o transformare liniară a necunoscutelor şi schimbarea timpului, sistemul (1.2) poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = y + \sum_{j=2}^{n} p_j(x,y) \equiv P(x,y), \quad \dot{y} = -x - \sum_{j=2}^{n} q_j(x,y) \equiv Q(x,y), \tag{1.4}$$

unde $p_j(x,y)$ şi $q_j(x,y)$ sunt polinoame omogene de gradul j.

Pentru punctul singular $O(0,0)$ al sistemului (1.4) avem $\lambda_{1,2} = \pm i$, $i^2 = -1$. Prin urmare, el este ori de tip centru, ori de tip focar. Punctul singular $O(0,0)$ al sistemului diferenţial (1.4) se numeşte $focar$, dacă într-o vecinătate a lui toate traiectoriile sunt spirale şi se numeşte $centru$, dacă toate traiectoriile sunt închise.

Unii autori numesc punctul singular pentru care $Re\lambda_j = 0$, $Im\lambda_j \neq 0$ *focar fin* sau *focar slab* sau punct singular *monodromic* (Schlomiuk [114], Christopher şi Li [22]).

Problema centrului. Să se determine condiţiile necesare şi suficiente asupra polinoamelor $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ astfel ca punctul singular ce are rădăcinile ecuaţiei caracteristice pur imaginare să fie pentru sistemul (1.2) de tip $centru$.

Pe parcursul anilor au fost dezvoltate mai multe metode ce permit determinarea condiţiilor de centru. Astfel, Poincaré [90] şi Lyapunov [85] au demonstart că punctul singular $O(0,0)$ este centru pentru sistemul (1.4) dacă şi numai dacă sistemul posedă într-o vecinătate oarecare a lui $O(0,0)$ o integrală primă analitică de forma $F(x,y)=C$. La fel, este cunoscut (Amel'kin şi alţii [1]) că $O(0,0)$ este centru pentru sistemul (1.4) dacă şi numai dacă sistemul dat are într-o vecinătate a punctului $O(0,0)$ un factor integrant analitic de forma

$$\mu(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x,y),$$

unde μ_k sunt polinoame omogene de gradul k.

Deşi problema centrului a fost formulată la sfârşitul secolului al XIX-lea, ea este complet rezolvată doar pentru:

– sistemele pătratice

$$\dot{x} = y + p_2(x,y), \quad \dot{y} = -x + q_2(x,y),$$

prin contribuţia lui Dulac [54], Kapteyn [70], Frommer [58], Saharnikov [110], Sibirschi [117, 118], Lunkevich şi Sibirschy [83], Malkin [87], Chengzhi [78], Schlomiuk [112, 113], Zoladek [146];

– sistemele cubice simetrice

$$\dot{x} = y + p_3(x,y), \quad \dot{y} = -x + q_3(x,y),$$

prin contribuţia lui Malkin [88], Lunkevich şi Sibirschy [84], Rousseau şi Schlomiuk [101], Zoladek [144];

– sistemul Kukles

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + q_2(x,y) + q_3(x,y),$$

prin contribuţia lui Kukles [76], Cherkas [16], Christopher şi Lloyd [19], Şubă [127], Rousseau şi Schlomiuk [102], Sadovskii [104].

Pentru sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale de forma

$$\dot{x} = y + p_2(x,y) + p_3(x,y), \quad \dot{y} = -x + q_2(x,y) + q_3(x,y), \tag{1.5}$$

problema centrului nu este complet rezolvată până-n prezent. Condiţiile necesare şi suficiente ca punctul singular $O(0,0)$ să fie centru pentru sistemul (1.5) au fost obţinute doar în unele cazuri particulare: pentru sistemele cubice cu infinitul degenerat (Kompel [71], Şubă [128], Chavarriga şi Gine [12]), pentru sistemele cubice cu părţile drepte de o formă specială (Daniliuk şi Şubă [45,46], Romanovski şi Şubă [99], Lloyd, Pearson şi Romanovski [82]), pentru un sistem cubic ce conţine nouă parametri şi care poate fi redus prin transformări la un sistem de tip Liénard (Bondar şi Sadovskii [6], Sadovskii şi Shcheglova [107]), pentru sistemele cubice care posedă patru drepte invariante (Şubă şi Cozma [26, 27]), pentru sistemele cubice ce au trei drepte invariante (Şubă şi Cozma [133–135]), pentru sistemele cubice care posedă două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă (Cozma [28–31]).

În [2] Baltag a studiat unele clase de sisteme cubice ce au integrală primă de forma $F_4^{\beta_1} F_6^{\beta_2} = C$, unde F_4 şi F_6 sunt polinoame de gradele patru şi şase, respectiv. Pentru aceste sisteme au fost găsite condiţiile de centru şi a fost efectuată cercetarea calitativă pe discul Poincaré. În [149] Županović a cercetat calitativ unele clase de sisteme cubice (1.5) cu punct singular de tip centru care au integrală primă de forma $F_1^2 F_3 = C$, unde F_1 şi F_3 sunt polinoame de gradele unu şi trei, respectiv.

Condiţii de existenţă a centrului au fost determinate pentru unele clase de sisteme cubice ce posedă soluţii algebrice în lucrările Hill, Lloyd şi Pearson [64], Sang şi Niu [111].

Problema centrului a fost studiată pentru unele clase de sisteme diferenţiale polinomiale în monografiile matematicienilor Sadovskii [105], Romanovski şi Shafer [98], Christopher şi Li [22], Cozma [31], Zhang [143], Popa şi Pricop [92]. Rezolvarea problemei generalizate a centrului (Ciobanu [25]), a fost efectuată de Popa şi Pricop [91].

Problema ciclicităţii punctului singular de tip centru sau focar, pentru unele clase de sisteme diferenţiale cubice, a fost examinată în lucrările: Żołądek [144], Bothmer şi Kröker [9], Yu şi Han [150], Romanovski şi Shafer [98], Levandovskyy, Pfister şi Romanovski [77], Li, Liu şi Yang [79], Ferčec şi Mahdi [57], ş.a.

În teza de faţă, pentru sistemele diferenţiale cubice (1.5) cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, sunt determinate condiţiile asupra coeficienţilor sistemului ce asigură existenţa centrului în punctul singular $O(0, 0)$. În Capitolul 2 sunt determinate condiţiile de existenţă a centrului pentru sistemul (1.5) cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă, în Capitolul 3 – cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, iar în Capitolul 4 – cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică.

1.2. Sisteme diferenţiale polinomiale cu soluţii algebrice

Fie sistemul diferenţial polinomial (1.2). Una dintre cele mai evidente întrebări este dacă soluţiile sistemului sunt algebrice, adică dacă traiectoriile lui pot fi descrise printr-o formulă algebrică, spre exemplu, de forma $\Phi(x, y) = 0$, unde Φ este un polinom în variabilele reale x şi y cu coeficienţii reali.

Definiţia 1.1. *Curba algebrică $\Phi(x, y) = 0$ în $\mathbb{C}^2$, unde $\Phi \in \mathbb{C}[x, y]$, se numeşte curbă algebrică invariantă a sistemului polinomial (1.2), dacă există un aşa polinom $K(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ încât în variabilele x şi y are loc identitatea*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Q(x, y) \equiv \Phi(x, y) K(x, y). \tag{1.6}$$

Polinomul $K(x, y)$ se numeşte cofactorul curbei algebrice invariante $\Phi(x, y) = 0$.

Menţionăm, că pentru o curbă algebrică $\Phi(x, y) = 0$ a sistemului (1.2) de gradul $n \geq 2$ avem $deg\, K_\Phi \leq n - 1$.

Definiţia 1.2. *Curba algebrică invariantă $\Phi(x, y) = 0$ se numeşte soluţie algebrică a sistemului (1.2), dacă $\Phi(x, y)$ reprezintă un polinom ireductibil în $\mathbb{C}[x, y]$.*

Următorea teoremă (Christopher şi Llibre [21]) ne permite ca în studiul sistemelor polinomiale (1.2) să fie considerate doar curbele algebrice invariante ireductibile în $\mathbb{C}[x, y]$.

Teorema 1.1. *Fie Φ un polinom din $\mathbb{C}[x, y]$ şi fie $\Phi = f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_r^{n_r}$ factorizarea lui în factori ireductibili în $\mathbb{C}[x, y]$. Atunci, curba algebrică $\Phi = 0$ este invariantă pentru sistemul (1.2) cu cofactorul K_Φ dacă şi numai dacă fiecare dintre polinoamele $f_k = 0$, $k = \overline{1, r}$ au această proprietate. Mai mult ca atât, între cofactorul K_Φ al curbei $\Phi(x, y) = 0$ şi cofactorii K_{f_k}, $k = \overline{1, r}$, ai curbelor $f_k(x, y) = 0$ are loc relaţia $K_\Phi = n_1 K_{f_1} + n_2 K_{f_2} \cdots + n_r K_{f_r}$.*

Pentru sistemele diferenţiale polinomiale reale o curbă algebrică complexă poate fi invariantă doar atunci când şi conjugata ei este o curbă invariantă (Christopher şi Llibre [21]).

Teorema 1.2. *O curbă algebrică complexă $\Phi(x, y) = 0$ este curbă invariantă pentru sistemul diferenţial polinomial real (1.2) dacă şi numai dacă şi conjugata ei $\overline{\Phi(x, y)} = 0$ este curbă invariantă. Dacă curbele conjugate $\Phi(x, y) = 0$ şi $\overline{\Phi(x, y)} = 0$ sunt invariante, atunci şi cofactorii lor K_Φ şi $K_{\overline{\Phi}}$ sunt, la fel, reciproc conjugaţi.*

În cazul sistemelor diferenţiale polinomiale (1.4) cu puncte singulare de tip centru sau focar formele curbelor algebrice invariante au fost determinate în lucrarea Cozma [31].

Teorema 1.3. *Orice curbă algebrică invariantă reală a sistemului (1.4) poate avea doar una dintre următoarele două forme:*

$$\alpha + f_1(x,y) + f_2(x,y) + \cdots + f_m(x,y) = 0, \quad \alpha \neq 0, \tag{1.7}$$

sau

$$\alpha(x^2+y^2)^r + f_{2r+1}(x,y) + \cdots + f_m(x,y) = 0, \quad \alpha \neq 0,\ r \geq 1, \tag{1.8}$$

unde $f_k(x,y)$ sunt polinoame omogene de gradul k. Cofactorii acestor curbe algebrice invariante nu conţin termeni constanţi.

Teorema 1.4. *Orice curbă algebrică invariantă complexă a sistemului (1.4) poate avea doar una dintre următoarele trei forme:*

$$\alpha + f_1(x,y) + f_2(x,y) + \cdots + f_m(x,y) = 0, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\alpha(x+iy)^r + f_{2r+1}(x,y) + \cdots + f_m(x,y) = 0, \quad \alpha \neq 0,\ r \geq 1;$$

$$\alpha(x-iy)^r + f_{2r+1}(x,y) + \cdots + f_m(x,y) = 0, \quad \alpha \neq 0,\ r \geq 1.$$

Conform Teoremelor 1.3 şi 1.4, aplicate asupra curbelor algebrice de gradul întâi, doi şi trei, vom obţine că:

– o dreaptă invariantă a sistemului (1.4) poate avea doar una dintre următoarele forme

$$1 + Ax + By = 0, \quad A,\ B \in \mathbb{C},\ (A,B) \neq (0,0) \tag{1.9}$$

sau

$$x - iy = 0,\ x + iy = 0,\ i^2 = -1; \tag{1.10}$$

– o conică invariantă ireductibilă a sistemului (1.4) poate avea forma

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0, \tag{1.11}$$

unde $(a_{20}, a_{11}, a_{02}) \neq 0,\ \ a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01} \in \mathbb{C}$;

– o cubică invariantă ireductibilă a sistemului (1.4) poate avea doar una dintre următoarele forme

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0 \tag{1.12}$$

sau

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + x^2 + y^2 = 0, \tag{1.13}$$

unde $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0,\ \ a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Determinarea condiţiilor de existenţă a unor curbe algebrice invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale de un anumit grad este o problemă destul de dificilă, deoarece rezolvarea ei este însoţită de calcule voluminoase. În unele cazuri, această problemă poate fi de nerezolvat fiindcă nu sunt cunoscute metode ce ar furniza informaţii despre gradele curbelor.

Următoarele probleme se referă la sistemele diferenţiale polinomiale de grad mai mare ca unu şi care au un număr finit de curbe algebrice invariante (Świrszcz [137], Goriely [66], Prelle şi Singer [96]).

Problema deschisă 1. *Pentru clasa sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n să se determine o aşa mărime $\alpha(n)$ care ar mărgini uniform de sus numărul de curbe algebrice invariante şi ireductibile ale fiecăruia dintre aceste sisteme.*

Problema deschisă 2. *Pentru fiecare sistem diferenţial polinomial să se determine marginea superioară a gradelor soluţiilor algebrice ale lui.*

Pe parcursul anilor o atenţie sporită a fost acordată sistemelor diferenţiale polinomiale ce posedă curbe algebrice invariante, studiului cărora le sunt dedicate un număr mare de lucrări ştiinţifice. Dreptele invariante au fost folosite la cercetarea sistemelor pătratice în lucrările: Bautin [4], Drujkova [55], Sibirschi [124], Popa şi Sibirschi [93, 94], Schlomiuk [112, 113], Schlomiuk şi Vulpe [115, 116]; iar la cercetarea sistemelor cubice în lucrările Ljubimova [80], Kooij [72, 73], Şubă şi Cozma [26, 27, 32, 133–135], Sadovskii [108], Lloyd, Pearson şi Romanovski [82], Rousseau şi Schlomiuk [101], Puţuntică [95], Ushkho [139], Repeşco [97], Şubă, Repeşco şi Puţuntică [136], Bujac [7], Bujac, Llibre şi Vulpe [8], Vacaraş [140].

Conicele invariante au fost considerate la cercetarea sistemelor pătratice şi sistemelor cubice în lucrările autorilor: Cherkas [17], Schlomiuk [114], Christopher [23], Oliveira, Rezende, Schlomiuk şi Vulpe [89], Sáez şi Száno [109], Cozma [28–31], Giné, Llibre şi Vallas [63].

Cubicele invariante au fost utilizate la cercetarea sistemelor pătratice şi sistemelor cubice în lucrările autorilor: Evdokimenko [56], Cherkas [17], Županović [149], Garcia [60], Cozma şi Dascalescu [35, 41], Dascalescu [50, 51].

În lucrarea de faţă, pentru sistemele diferenţiale cubice (1.5), sunt stabilite condiţiile asupra coeficienţilor sistemului ce asigură existenţa a două drepte invariante distincte de forma (1.9) şi a unei cubice invariante ireductibile de forma (1.13).

1.3. Integrabilitate Darboux şi reversibilitate

Studierea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale ţine de metodele clasice cunoscute şi de metodele elaborate în ultimii ani. În [148] Żołądek a propus trei mecanisme generale de soluţionare a problemei centrului: construirea integralei prime de tipul Darboux sau căutarea integralei prime de tipul Darboux–Schwarz–Christoffel sau reversibilitatea raţională. El afirmă că aceste mecanisme sunt suficiente pentru rezolvarea completă a problemei centrului.

În teza de faţă, în studiul problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale ce posedă curbe algebrice invariante, sunt dezvoltate două mecanisme de bază: metoda de integrabilitate Darboux şi metoda reversibilităţii.

Problema centrului se consideră rezolvată dacă sistemul diferenţial poate fi integrat.

Definiţia 1.3. *Sistemul polinomial (1.4) se numeşte integrabil pe domeniul $D \subset R^2$ dacă există o funcţie analitică diferită de o constantă $F : D \to R$ numită integrală primă a sistemului (1.4) pe D, care este constantă pentru toate valorile lui t, pentru care soluţia $(x(t), y(t))$ este definită şi se conţine în D.*

Ne va interesa doar integrabilitatea algebrică a sistemelor examinate, numită *integrabilitatea Darboux.* Ea constă în construirea integralei prime (factorului integrant) a sistemului diferenţial polinomial sub o anumită formă, folosind curbele algebrice invariante ale sistemului. Pentru un sistem diferenţial polinomial cu punct singular de tip centru sau focar, construirea integralei prime de tip Darboux din soluţiile lui algebrice asigură existenţa centrului în acest punct (Amel'kin, Lukashevich şi Sadovskii [1]; Romanovski şi Shafer [98]).

Definiţia 1.4. *Vom numi factor integrant al sistemului (1.4) pe careva domeniu D din $\mathbb{R}^2$ o funcţie continuu difirenţiabilă pe D, diferită de zero, care realizează identitatea*

$$P(x,y)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}+Q(x,y)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\equiv 0. \qquad (1.14)$$

Următoarea teoremă reprezintă condiţia de existenţă a integralei prime.

Teorema 1.5. *Pentru ca relaţia $F(x,y) = C$ să fie integrală primă a sistemului (1.4) pe domeniul D este necesar şi suficient ca $\forall(x,y) \in D$ să se verifice indentitatea*

$$P(x,y)\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+Q(x,y)\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\equiv 0. \qquad (1.15)$$

Vom considera integrala primă (factorul integrant) a sistemului (1.4) formată din curbe algebrice invariante.

Definiţia 1.5. *Fie* $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_q = 0$ *curbe algebrice invariante ale sistemului (1.4) din* $\mathbb{C}[x, y]$*. Integrala primă (factorul integrant) de forma*

$$\Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \ldots \Phi_q^{\alpha_q} = C \tag{1.16}$$

$$\left(\mu = \Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \ldots \Phi_q^{\alpha_q}\right), \tag{1.17}$$

unde α_j, $j = 1, \ldots, q$ *sunt numere complexe, nu toate zero, se numeşte integrală primă (factor integrant) Darboux.*

Dacă expresia (1.16) este integrală primă sau expresia (1.17) este factor integrant pentru sistemul (1.4), atunci, în mod necesar, curbele algebrice $\Phi_j(x, y) = 0$ sunt curbe algebrice invariante ale sistemului (1.4) (Schlomiuk [113]).

Metoda de integrare a sistemelor diferenţiale polinomiale prin folosirea curbelor algebrice invariante a fost elaborată de către Darboux [44]. Anume el a propus, pentru prima dată, ca integrala primă (factorul integrant) a sistemelor diferenţiale ce posedă curbe algebrice invariante să fie construită sub forma (1.16) ((1.17)).

Sistemul diferenţial (1.4) posedă integrală primă de forma (1.16) sau factor integrant de forma (1.17) dacă se realizează următoarea afirmaţie.

Teorema 1.6. *Pentru ca sistemul diferenţial (1.2) să posede integrală primă Darboux (1.16) (factor integrant Darboux (1.17)) este necesar şi suficient să existe aşa constante* $\alpha_j, j = 1, \ldots, q$*, nu toate identic egale cu zero, încât să se îndeplinească indentitatea*

$$\alpha_1 K_1(x, y) + \alpha_1 K_1(x, y) + \ldots + \alpha_q K_q(x, y) \equiv 0 \tag{1.18}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \cdot K_j(x, y) + \frac{\partial (P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial (Q(x, y)}{\partial y} \equiv 0 \right). \tag{1.19}$$

Dacă sistemul diferenţial (1.4) are integrală primă de forma (1.16) sau factor integrant de forma (1.17), unde $\Phi_j(x, y) = 0$ sunt curbe algebrice invariante ale sistemului, atunci vom spune că sistemul dat este *Darboux integrabil.*

Problema deschisă 3. *Pentru sistemele diferenţiale polinomiale de gradul* n *să se determine relaţiile dintre gradele curbelor algebrice invariante, numărul lor, existenţa şi tipul integralelor prime.*

Un răspuns parţial la această problemă a fost dat de Darboux:

Teorema 1.7. *Fie că sistemul diferenţial (1.2) are cel puţin q curbe algebrice invariante ireductibile* $\Phi_j = 0,\ j = 1, \dots, q$. *Dacă* $q \geq \frac{1}{2}n(n+1)$, *atunci (1.2) este Darboux integrabil, adică sistemul posedă integrală primă sau factor integrant de tip Darboux.*

Teorema Darboux, expusă mai sus, se referă la întreaga clasă de sisteme diferenţiale polinomiale de gradul n. Se impune problema, dacă în anumite subclase ale acestor sisteme numărul Darboux $\frac{1}{2}n(n+1)$, suficient pentru integrabilitate, ar putea fi micşorat.

Pentru sistemele diferenţiale pătratice, Schlomiuk [114] a demonstrat pentru prima dată aplicativitatea metodei Darboux în toate cazurile de existenţă a centrului.

Mulţi matematicieni au folosit cu succes metoda Darboux de integrare la rezolvarea problemei centrului pentru unele clase de sisteme cubice cu puncte singulare de tip centru şi cu un anumit număr de soluţii algebrice: Şubă [128] a determinat condiţiile de existenţă a centrului pentru un sistem cubic cu infinitul degenerat folosind drepte invariante, iar în [129] condiţiile de centru au fost detereminate pentru un sistem cubic prin folosirea dreptelor invariante şi a factorilor exponenţiali; Şubă şi Cozma au obţinut condiţiile de existenţă a centrului pentru sistemele cubice care au patru drepte invariante [26,27] şi care au trei drepte invariante [133–135]; Cozma a determinat condiţiile de existenţă a centrului pentru sistemele cubice care au două drepte invariante şi o conică invariantă [28–31]; Hill, Lloyd şi Pearson [64] au obţinut condiţiile de existenţă a centrului pentru un sistem cubic de tip Kukles folosind soluţii algebrice de gradele unu, doi şi trei; Lloyd, Pearson şi Romanovski [82] au determinat condiţiile de centru pentru un sistem cubic prin folosirea dreptelor invariante.

Integrabilitatea Darboux a sistemelor diferenţiale polinomiale cu un anumit număr de curbe algebrice invariante ce satisfac unor condiţii generice a fost studiată în lucrările autorilor: Christopher şi Kooij [75], Christopher şi Llibre [20, 21], Christopher şi alţii [24].

Definiţia 1.6. *Vom spune că sistemul diferenţial (1.4) este reversibil în timp, dacă portretul lui de fază este invariant la o reflecţie în raport cu o dreaptă ce trece prin originea sistemului de coordonate şi la schimbarea semnului timpului.*

Despre sistemul (1.4), care este reversibil în timp, se spune că are axă de simetrie, iar dreapta din Definiţia 1.6 se numeşte axă de simetrie. Astfel, pentru sistemul (1.4), care este invariant în raport cu transformarea $(x, y, \tau) \to (-x, y, -\tau) \quad ((x, y, \tau) \to (x, -y, -\tau))$, axa ordonatelor ($Oy$) (axa absciselor Ox) este axă de simetrie.

De la Poincaré [90] se ştie, că dacă un sistem diferenţial polinomial (1.4), pentru care

$O(0,0)$ este punct singular de tip centru sau focar, are axă de simetrie ce trece prin $O(0,0)$, atunci $O(0,0)$ este centru.

Să scriem sistemul diferenţial polinomial (1.4) în formă de o ecuaţie diferenţială

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \equiv f(x,y). \tag{1.20}$$

O condiţie necesară şi suficientă ca ecuaţia (1.20) să posede axa de simetrie $Ax+By+C=0$, $(A,B) \neq 0$ este următoarea teoremă (Gorbuzov şi Tischenko [65]).

Teorema 1.8. *Dreapta $Ax + By + C = 0$ este axă de simetrie pentru ecuaţia diferenţială (1.20) dacă şi numai dacă se realizează identitatea*

$$f\Big(x - \frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C),\, y - \frac{2B}{A^2+B^2}(Ax+By+C)\Big) \equiv$$

$$\equiv \frac{2AB - (A^2-B^2)f(x,y)}{A^2-B^2+2ABf(x,y)}. \tag{1.21}$$

Żołądek [147] a generalizat noţiunea de simetrie, numind-o reversibilitate, şi a clasificat sistemele cubice cu centru şi cu proprietatea de reversibilitate. Pentru o clasă de sisteme bidimensionale polinomiale un algoritm de depistare a sistemelor reversibile a fost propus de către Romanovski [100]. Interdependenţa dintre reversibilitate şi problema centrului a fost studiată de către Teixeira şi Jiazhong [138]. Unele transformări biliniare ce reduc sistemul dat la un sistem cu axă de simetrie au fost studiate de Lloyd şi Pearson [81], Cozma [32], care au permis obţinerea condiţiilor de existenţă a centrului pentru unele clase de sisteme cubice.

În teza de faţă se obţin condiţii de existenţă a centrului pentru sistemele cubice (1.5) ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă folosind metodele de integrabilitate Darboux (Capitolele 2, 3 şi 4) şi de reversibilitate (Capitolul 2).

1.4. Problema ciclicităţii

Fie sistemul diferenţial polinomial (1.2). Printre traiectoriile acestui sistem se pot identifica unele care corespund soluţiilor periodice izolate. Aceste traiectorii se numesc *cicluri limită*, adică un ciclu limită este o traiectorie închisă şi izolată. Notăm cu $\pi(P,\, Q)$ numărul de cicluri limită a sistemului (1.2) şi fie $H_n = \sup\{\, \pi(P,Q) : \text{grad } P, Q \leq n \,\}$.

Interesul sporit în soluţionarea problemei centrului se datorează problemei a 16-a a lui Hilbert. Partea a doua a acestei probleme constă în determinarea numărului H_n, adică a numărului maximal de cicluri limită şi localizarea acestora pentru clasa de sisteme diferenţiale polinomiale de gradul n.

Până-n prezent, careva estimaţii de sus a numărului H_n nu se cunosc nici pentru clasa sistemelor pătratice ($n = 2$), se ştie doar o estimaţie inferioară că $H_2 \geq 4$ (Songling [125]). Pentru fiecare sistem diferenţial polinomial (1.2), luat aparte, problema de finitudine a fost rezolvată prin contribuţia lui Ecalle, Martinet, Moussu, Ramis şi Il'yashenko [69].

Studiul actual al problemei lui Hilbert se bazează pe teoria bifurcaţiilor şi constă în investigarea ciclurilor limită ce pot apărea la bifurcaţii dintr-un punct singular de tipul centru sau focar, adică când coeficienţii sistemului de ecuaţii diferenţiale sunt perturbaţi cu mărimi destul de mici, numită *problema ciclicităţii*. Această problemă este cunoscută sub numele de *problema locală a 16-a a lui Hilbert*, iar ciclurile limită, astfel produse, se numesc *cicluri limită locale* sau *cicluri limită de amplitudine mică*. Un pas important în soluţionarea ei reprezintă rezolvarea problemei centrului (Chavarriga şi Grau [14]).

Fie E spaţiul coeficienţilor sistemului (1.4). Vom spune că traiectoria singulară φ a sistemului $E_0 \in E$ are ciclicitatea k în raport cu E dacă şi numai dacă orice perturbare a sistemului E_0 în E are cel mult k cicluri limită într-o vecinătate a traiectoriei φ şi k este numărul minim cu această proprietate.

Se ştie, că există o aşa serie formală de puteri $F(x, y) = \sum F_j(x, y)$, încât viteza de schimbare a ei de-a lungul traiectoriilor sistemului (1.4) reprezintă o combinaţie liniară a polinoamelor $\{(x^2 + y^2)^j\}_{j=2}^{\infty}$:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=2}^{\infty} L_{j-1}(x^2 + y^2)^j.$$

Constantele $L_j,\ j = \overline{1, \infty}$ sunt polinoame în raport cu coeficienţii sistemului (1.4) şi se numesc *mărimi Lyapunov* (Amel'kin, Lukashevich şi Sadovskii [1], Şubă [130]).

Fie $L_1 = L_2 = \cdots = L_{m-1} = 0$, iar $L_m \neq 0$, atunci vom spune că punctul singular $O(0, 0)$ este un focar fin (focar slab) de ordinul m. Cel mult m cicluri limită de amplitudine mică pot fi bifurcate din $O(0, 0)$ la perturbarea coeficienţilor sistemului (1.4) (Christopher [18]).

Teorema 1.9. *Punctul singular $O(0, 0)$ este centru pentru sistemul diferenţial polinomial (1.4) dacă şi numai dacă toate mărimile Lyapunov se anulează, adică $L_j = 0,\ j = \overline{1, \infty}$.*

Astfel, problema centrului pentru un sistem diferenţial polinomial poate fi redusă la problema rezolvării unui sistem infinit de ecuaţii polinomiale în raport cu coeficienţii sistemului diferenţial. Ţinând cont de teorema lui Hilbert despre baza finită, o infinitate de condiţii este echivalentă cu una finită. Sistemul infinit de ecuaţii polinomiale $L_k = 0,\ k = \overline{1, \infty}$, este echivalent cu un sistem finit $L_k = 0,\ k = \overline{1, N}$, adică există un număr N astfel încât anularea primelor N mărimi Lyapunov implică anularea tuturor. Prin urmare, condiţiile necesare de existenţă a centrului pot fi obţinute rezolvând acest sistem de ecuaţii polinoame.

Cu toate că este necesar de calculat doar un numar finit de mărimi Lyapunov, în fiecare caz aparte, nu se cunoaşte acest număr. Mărimile Lyapunov se calculează după o formulă recurentă. La fiecare pas aceste mărimi cresc exponenţial în volum şi atât mijloacele tehnice de calcul cât şi Softurile pentru ele, de care dispun cercetătorii astăzi, nu sunt capabile de a le prelucra. Aceasta ar fi explicaţia, că numărul N a fost determinat doar pentru unele clase înguste de sisteme diferenţiale polinomiale. Numărul N este cunoscut pentru sistemele pătratice $N = 3$ (Sibirschi [120], Bautin [4]) şi pentru sistemele cubice simetrice $N = 5$ (Żołądek [144]). În cazul sistemului diferenţial polinomial (1.4), când $n \geq 3$, avem următoarea problemă:

Problema deschisă 4. *Pentru oricare n ($n \geq 3$) fixat să se determine un aşa număr minim $N = N(n)$, încât anularea primelor N mărimi Lyapunov să asigure pentru sistemul (1.4) existenţa centrului în punctul singular $O(0, 0)$.*

O soluţie în cazul Problemei deschise 4, care permite rezolvarea Problemei generalizate a centrului (Ciobanu [25]), a fost obţinută în lucrarea Popa şi Pricop [91]. Folosind metoda algebrelor Lie şi a algebrelor graduate Sibirschi a fost găsită o estimare pentru numărul maximal de mărimi focale algebric independente utilizate la rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale de gradul n.

În lucrarea [31], numărul N a fost determinat pentru sistemul diferenţial cubic (1.5) în presupunerea că acesta posedă drepte şi conice invariante. Astfel, în cazul a patru drepte invariante numărul N este egal cu 2; în cazul a trei drepte invariante $-$ $N = 7$, iar în cazul a două drepte invariante şi o conică invariantă $-$ $N = 4$.

Pentru a bifurca cicluri limită în sistemul (1.4), din originea de coordonate $O(0, 0)$, alegem coeficienţii în mărimile Lyapunov astfel încât

$$|L_m| \ll |L_{m+1}| \quad \text{şi} \quad L_m L_{m+1} < 0,$$

pentru $m = 0, 1, \ldots, k-1$. La fiecare etapă, în $O(0, 0)$ se inversează stabilitatea şi un ciclu limită apare într-o regiune mică a punctului singular. Dacă aceste condiţii sunt realizate, atunci exact k cicluri limită de amplitudine mică pot fi bifurcate. Dacă $L_k \neq 0$, atunci pot bifurca cel mult k cicluri limită. În unele cazuri bifurcarea completă a ciclurilor limită nu este posibilă (Lynch [86]).

Problema ciclicităţii punctului singular de tip centru sau focar, pentru unele clase de sisteme diferenţiale cubice, a fost examinată în lucrările autorilor: Żołądek [144], Bothmer şi Kröker [9], Yu şi Han [150], Romanovski şi Shafer [98], Levandovskyy, Pfister şi Romanovski [77], Gaiko [59], Li, Liu şi Yang [79], Ferčec şi Mahdi [57], ş.a.

Żołądek [145] a arătat că există sisteme cubice cu 11 cicluri limită care pot fi bifurcate dintr-un punct singular de tip centru. Yu şi Han [150] au adus un exemplu de sistem cubic cu 12 cicluri limită de amplitudine mică. Aşadar, în prezent se cunoaşte că $H_3 \geq 12$.

Pentru sistemele diferenţiale polinomiale s-a arătat că numărul de cicluri limită, ce pot fi bifurcate dintr-un punct singular de tip centru sau focar, depinde nu numai de existenţa curbelor algebrice invariante dar şi de poziţiile relative ale acestora. Astfel, un sistem pătratic: cu două drepte invariante reale nu are cicluri limită (Bautin [5]); cu două drepte invariante complexe conjugate are cel mult un ciclu limită (Suo Guangjian [126]); cu o dreaptă invariantă poate avea cel mult un ciclu limită (Rychkov [103]).

Un sistem cubic: cu cinci drepte reale invariante nu are cicluri limită (Dai Guoren şi Wo Sonlin [43]); cu patru drepte reale invariante sau cu două drepte reale invariante şi două drepte invariante complexe conjugate are cel mult un ciclu limită (Kooij [72], [73], Cozma şi Şubă [26]); cu patru drepte invariante complexe conjugate poate avea cel mult două cicluri limită (Kooij [73], Cozma şi Şubă [27]); cu trei drepte invariante, dintre care două sunt paralele sau cu un fascicol din trei drepte invariante, poate avea nu mai mult de cinci cicluri limită (Cozma şi Şubă [134], [135], [31]); cu trei drepte invariante, dintre care două sunt complexe conjugate şi omogene, poate avea cel mult şapte cicluri limită (Cozma şi Şubă [133]); cu două drepte invariante paralele şi o conică invariantă poate avea cel mult trei cicluri limită (Cozma [28]); cu două drepte invariante neomogene şi o conică invariantă poate avea cel mult patru cicluri limită (Cozma [31]).

În [74] a fost studiată problema existenţei ciclurilor limită de Kooij pentru sistemele polinomiale (1.1), $deg(X^2 + Y^2) = 2n$, cu $n + 1$ drepte invariante.

În teza de faţă, numărul N este determinat pentru sistemul cubic (1.5) cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă. În Capitolele 2, 3 şi 4 se demonstrează că în cazurile a două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă numărul N este egal cu 2; în celelalte cazuri când sistemul posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă $-$ $N = 3$.

1.5. Problema consecutivităţilor centrice

Fie sistemul diferenţial polinomial (1.4) posedă M curbe algebrice invariante $\Phi_k(x, y) = 0$, $k = 1, \ldots, M$, unde $M < n(n + 1)/2$. În aceste condiţii, ţinând cont de Problema deschisă 4, să se determine un aşa număr minim N, încât anularea primelor N mărimi Lyapunov să asigure pentru sistemul (1.4) existenţa centrului în punctul singular $O(0, 0)$.

Deşi sunt mai mulţi algoritmi de calculare a mărimilor Lyapunov pentru punctul singular $O(0, 0)$ (Şubă [130], Sadovskii [105], Romanovski şi Shafer [98]) un răspuns satisfăcător nu avem, adică nu există un criteriu ce ne-ar indica care sunt primele mărimi Lyapunov anularea cărora implică egalitatea cu zero a celorlalte mărimi Lyapunov.

Problema deschisă 5. *Să se determine sistemele diferenţiale polinomiale (1.4) care au un număr de curbe algebrice invariante mai mic decât* $n(n+1)/2$ *şi pentru care punctul singular* $O(0, 0)$ *este de tip centru.*

Pentru prima dată această problemă a fost examinată în lucrările autorilor Şubă şi Cozma [26, 33, 130]. A fost propusă o nouă abordare a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale (1.4) prin luarea în considerare, concomitent, a curbelor algebrice invariante, a mărimilor Lyapunov şi a integrabilităţii Darboux. S-a demonstrat, că în cazul sistemelor polinomiale (1.4), numărul de curbe algebrice invariante $n(n+1)/2$, necesar după Darboux pentru integrabilitate, poate fi micşorat, dacă se presupune a priori, că un număr anumit de mărimi Lyapunov sunt nule (Christopher şi Llibre [20]).

În lucrarea [33] Cozma a propus o direcţie nouă de cercetare a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale şi anume, *problema determinării consecutivităţilor (perechilor) centrice*: pentru fiecare număr natural dat n, $n \geq 3$, să se determine toate consecutivităţile centrice ale sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n ce au puncte singulare de tip centru sau focar.

Definiţia 1.7. *Vom spune că consecutivitatea* $(\Phi_k,\ k = \overline{1, M};\ N)$, *formată din curbele algebrice* $\Phi_k(x, y) = 0$, $k = \overline{1, M}$ *şi numărul natural* N, *este o consecutivitate centrică pentru sistemul (1.4), dacă din faptul, că curbele date sunt invariante şi că primele* N *mărimi Lyapunov sunt nule, rezultă că punctul singular* $O(0, 0)$ *este de tip centru pentru (1.4).*

Următorul rezultat (Şubă şi Cozma [33, 130]), ce ţine de Problema deschisă 5, îmbunătăţeşte condiţiile Teoremei Darboux 1.7 despre integrabilitate în cazul sistemelor diferenţiale pentru care apare problema centrului.

Teorema 1.10. *Fie M numărul total al curbelor algebrice invariante ce nu trec prin originea de coordonate a sistemului (1.4) şi fie că pentru el primele q $(0 < q \leq (n-1)/2)$ mărimi Lyapunov, asociate punctului singular de tip centru sau focar $O(0,0)$, se anulează. Atunci, sistemul (1.4) are*

1) factor integrant Darboux, dacă $M \geq n(n+1)/2 - q - 1$;

2) integrală primă Darboux, dacă $M \geq n(n+1)/2 - q$.

În ambele cazuri originea de coordonate $O(0,0)$ este centru.

În cazul sistemului diferenţial cubic (1.5), Teorema 1.10 se formulează astfel:

Teorema 1.11. *Dacă prima mărime Lyapunov se anulează $L_1 = 0$ şi sistemul diferenţial cubic (1.5) are patru curbe algebrice invariante ce nu trec prin $O(0,0)$, atunci originea de coordonate este centru.*

Ideea micşorării numărului de curbe algebrice invariante, necesare pentru integrabilitatea Darboux a sistemelor diferenţiale polinomiale, a fost luată la bază şi de alţi matematicieni. În lucrarea Chavarriga, Llibre şi Sotomayor [15] se arată, că numărul $n(n+1)/2$ de soluţii algebrice, suficient pentru integrabilitatea Darboux, poate fi micşorat, dacă pe lângă aceste soluţii se mai consideră şi unele puncte singulare, numite puncte singulare independente. În [13] Chavarriga, Giacomini şi Giné au demonstrat că dacă un sistem diferenţial polinomial de gradul n cu partea liniară arbitrară are centru în originea de coordonate şi posedă $n(n+1)/2 - [(n+1)/2]$ soluţii algebrice, atunci sistemul are factor integrant Darboux.

În lucrarea [33] a fost rezolvată problema consecutivităţilor centrice pentru sistemul diferenţial cubic (1.5) în cazurile când sistemul are: patru drepte invariante; trei drepte invariante; două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă de forma (1.13). Astfel, au fost obţinute următoarele consecutivităţi centrice:

– în cazul a şase drepte invariante: $(1 + A_jx + B_jy,\ j = \overline{1,4},\ x \pm iy;\ N = 0)$;

– în cazul a patru drepte invariante: $(1 + A_jx + B_jy,\ j = \overline{1,4};\ N = 1)$; $(x \pm iy,\ 1 + A_jx + B_jy,\ j = 1,2;\ N = 2)$;

– în cazul a trei drepte invariante: $(x \pm iy,\ 1 + Ax + By;\ N = 7)$; $(l_j = 1 + A_jx + B_jy,\ j = \overline{1,3},\ l_1 || l_2;\ N = 5)$; $(l_j = 1 + A_jx + B_jy,\ j = \overline{1,3},\ l_1 \cap l_2 \cap l_3 \neq \emptyset;\ N = 5)$; $(l_j = 1 + A_jx + B_jy,\ l_1 \cap l_2 \notin l_3,\ l_j \nparallel l_k, j \neq k, j,k = 1,2,3;\ N = 3)$;

– în cazul a două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă Ψ: $(x \pm iy,\ \Psi;\ N = 2)$; $(l_j = 1 + A_jx + B_jy,\ j = 1,2,\ l_1 || l_2,\ \Psi;\ N = 3)$; $(l_j = 1 + A_jx + B_jy,\ j = 1,2,\ \Psi,\ \Psi(l_1 \cap l_2) = 0;\ N = 4)$; $(l_j = 1 + A_jx + B_jy,\ j = 1,2,\ \Psi,\ l_1 \nparallel l_2,\ l_1 \cap l_2 \notin \Psi;\ N = 4)$.

Aşa cum problema centrului pentru sistemul diferenţial cubic (1.5) nu este complet rezolvată, în teza de faţă formulăm următoarele două probleme fundamentale:

Problema 1. *Să se determine condiţiile de existenţă a două drepte invariante distincte şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemele diferenţiale cubice.*

Problema 2. *Să se determine toate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.*

Soluţiile obţinute pentru Problemele 1 şi 2 sunt incluse în Capitolele 2, 3 şi 4.

1.6. Concluzii la capitolul 1

Capitolul 1 conţine o analiză a celor mai importante rezultate cunoscute în domeniul teoriei integrabilităţii ecuaţiilor diferenţiale care ţin de sarcinile şi obiectivele lucrării: a 16-a problemă locală a lui Hilbert; problema integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale cu soluţii algebrice; problema deosebirii centrului de focar; problema consecutivităţilor centrice.

În acest capitol au fost stabilite problemele de cercetare şi sunt dezvoltate două mecanisme principale folosite la rezolvarea problemei centrului: metoda de integrabilitate Darboux şi metoda reversibilităţii. Pentru sistemele diferenţiale cubice cu punct singular de tip centru sau focar şi care au soluţii algebrice sunt formulate două probleme fundamentale:

– să se determine condiţiile de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante ireductibile de forma (1.13).

– să se determine toate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de forma (1.13).

Problemele formulate şi rezultatele expuse în acest capitol au fost publicate în lucrările [35], [41], [50], [51].

2. SISTEME CUBICE CU DOUĂ DREPTE INVARIANTE PARALELE ŞI O CUBICĂ INVARIANTĂ

În acest capitol, pentru sistemul diferenţial cubic (1.5) cu punctul singular $O(0,0)$ de tip centru sau focar, sunt obţinute condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă. Se determină ciclicitatea punctului singular $O(0,0)$ şi se rezolvă problema centrului pentru sistemul (1.5) cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă. Se demonstrează că $(1+a_1x=0,\ 1+a_2x=0,$ $x^2+y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3;\ N=2)$ este o consecutivitatea centrică.

2.1. Sisteme cubice cu două drepte invariante distincte

Fie sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale (1.5) scris sub forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 = P(x,y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) = Q(x,y), \end{aligned} \tag{2.1}$$

unde $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt polinoame reale în variabilele x şi y. Originea de coordonate $O(0,0)$ este pentru (2.1) punct singular de tip centru sau focar (focar slab sau focar fin).

În această secţiune, pentru sistemul cubic (2.1), vom determina condiţiile de existenţă a două drepte invariante de forma

$$1 + Ax + By = 0, \quad A, B \in \mathbb{C},\ (A,B) \neq (0,0). \tag{2.2}$$

Definiţia 2.1. *Dreapta (2.2) se numeşte dreaptă invariantă a sistemului (2.1), dacă există un aşa polinom* $K(x,y) = c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$ *încât în* x *şi* y *are loc identitatea*

$$A \cdot P(x,y) + B \cdot Q(x,y) \equiv (1 + Ax + By) \cdot K(x,y). \tag{2.3}$$

Polinomul $K(x,y)$ *se numeşte cofactorul dreptei invariante.*

Dacă sistemul (2.1) are drepte invariante complexe, atunci conform Teoremei 1.2, ele pot exista doar în perechi de drepte complexe conjugate

$$1 + Ax + By = 0 \quad \text{şi} \quad 1 + \overline{A}x + \overline{B}y = 0.$$

Egalând coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale monoamelor x^iy^j în (2.3), reducem această identitate la un sistem format din nouă ecuaţii $\{F_{ij} = 0\}$ în raport cu necunoscutele $A, B, c_{20},\ c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}$. Din el găsim că

$$\begin{aligned} &c_{10} = -B,\ c_{01} = A,\ c_{20} = aA - gB + AB, \\ &c_{11} = cA - dB + B^2 - A^2, c_{02} = fA - bB - AB \end{aligned}$$

iar A şi B sunt soluţii ale următorului sistem de ecuaţii algebrice:

$$\begin{aligned} &F_1(A,B) \equiv AB^2 - fAB + bB^2 + rA - lB = 0, \\ &F_2(A,B) \equiv A^2B + aA^2 - gAB - kA + sB = 0, \\ &F_3(A,B) \equiv B^3 - 2A^2B + fA^2 - dB^2 + (c-b)AB - pA + nB = 0, \\ &F_4(A,B) \equiv A^3 - 2AB^2 - cA^2 + gB^2 + (d-a)AB + mA - qB. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cofactorul dreptei invariante (2.2) are forma $K(x,y) = -Bx + Ay + (aA - gB + AB)x^2 + (cA - dB + B^2 - A^2)xy + (fA - bB - AB)y^2$.

Soluţiile sistemului (2.4) în raport cu A şi B ne determină dreptele invariante neomogene ale sistemului cubic (2.1). Ne interesează doar dreptele invariante distincte.

Fie sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante distincte l_1 şi l_2 care pot fi reale sau complexe. Dacă l_1, l_2 sunt complexe, atunci $l_2 = \overline{l_1}$. În caz contrar, adică $l_2 \neq \overline{l_1}$, dreptele invariante $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$ complexe conjugate cu l_1 şi l_2 la fel sunt drepte invariante pentru sistemul cubic (2.1). Prin urmare, sistemul (2.1) posedă patru drepte invariante distincte, iar problema centrului a fost soluţionată în lucrarea Cozma şi Şubă [27].

Dacă sistemul (2.1) are două drepte invariante paralele l_1 şi l_2, atunci la o rotaţie a sistemului de coordonate, aducem dreptele să fie paralele la axa ordonatelor (Oy). Menţionăm că la rotaţia sistemului de coordonate partea liniară a sistemului (2.1) îşi păstrează forma. Să admitem că l_1 şi l_2 sunt complexe, atunci $l_2 = \overline{l_1}$. Din $l_1 \parallel \overline{l_1}$, urmează că l_1 va avea forma $1 + A(x + By) = 0$, unde A este un număr complex iar B este real. În acest caz, printr-o rotaţie a axelor, deasemenea dreptele l_1 şi l_2 pot fi aduse paralele la axa Oy. În lucrarea Cozma [32] a fost demonstrată următoarea afirmaţie

Lema 2.1. *Sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante paralele la axa ordonatelor Oy dacă şi numai dacă se realizează următorul set de condiţii:*

$$a = f = k = p = r = 0, \tag{2.5}$$

$m(c^2 - 4m) \neq 0$. Dreptele invariante sunt

$$l_{1,2} \equiv 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0, \tag{2.6}$$

şi au cofactorii $K_{1,2}(x,y) = y(2mx + c \pm \sqrt{c^2 - 4m})/2$, respectiv.

Fie sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante l_1 şi l_2 concurente în punctul singular (x_0, y_0). La o rotaţie a sistemului de coordonate ($x \to xcos\varphi - ysin\varphi, y \to xsin\varphi + ycos\varphi$) şi rescalarea axelor ($x \to \alpha x, y \to \alpha y$), obţinem $l_1 \bigcap l_2 = (0,1)$. În acest caz dreptele invariante se pot scrie sub forma

$$l_j \equiv 1 + a_j x - y = 0,\ a_j \in \mathbb{C},\ j = 1,2;\ a_2 - a_1 \neq 0. \tag{2.7}$$

Aşa cum $(0,1)$ este punct singular pentru sistemul (2.1), atunci $P(0,1) = Q(0,1) = 0$. Din aceste egalităţi obţinem că $l = -b$ şi $r = -f - 1$. Substituind în (2.4) $A = a_j,\ j = 1,2$, $B = -1$, stabilim că sistemul (2.1) posedă două drepte invariante concurente de forma (2.7) dacă şi numai dacă a_1 şi a_2 sunt soluţiile sistemului

$$\begin{aligned}
&F_2(a_1) \equiv (a-1)a_1^2 + (g-k)a_1 - s = 0,\\
&F_3(a_1) \equiv (f+1)a_1^2 + (b-c-p)a_1 - d - n - 1 = 0,\\
&F_4(a_1) \equiv a_1^3 - ca_1^2 + (a-d+m-2)a_1 + g + q = 0,\\
&F_2(a_2) \equiv (a-1)a_2^2 + (g-k)a_2 - s = 0,\\
&F_3(a_2) \equiv (f+1)a_2^2 + (b-c-p)a_2 - d - n - 1 = 0,\\
&F_4(a_2) \equiv a_2^3 - ca_2^2 + (a-d+m-2)a_2 + g + q = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Sistemul (2.8) este echivalent cu următoarele două seturi de relaţii:

$$\begin{aligned}
&l = -b,\ r = -f - 1,\ s = a_1(g - k + a_1(a-1)),\\
&n = (f+2)a_1^2 + (b-c-p)a_1 - d - 1,\\
&q = -a_1^3 + ca_1^2 + (2-a+d-m)a_1 - g,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
&F_2 \equiv (a-1)(a_1+a_2) + g - k = 0,\\
&F_3 \equiv (f+2)(a_1+a_2) + b - c - p = 0,\\
&F_4 \equiv a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 - c(a_1+a_2) + a - d + m - 2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

În lucrarea Cozma [32] a fost demonstrată următoarea afirmaţie

Lema 2.2. *Sistemul diferenţial cubic (2.1) are două drepte invariante distincte de forma (2.7) dacă şi numai dacă se realizează următoarul set de condiţii:*

$$\begin{aligned}
&k = (a-1)(a_1+a_2) + g,\ \ l = -b,\ \ s = (1-a)a_1a_2,\\
&m = -a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1+a_2) - a + d + 2,\\
&n = a_1a_2(-f-2) - (d+1),\ \ p = (f+2)(a_1+a_2) + b - c,\\
&q = (a_1+a_2-c)a_1a_2 - g,\ \ r = -f - 1,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$(a-1)^2 + (f+2)^2 \neq 0$. Cofactorii dreptelor invariante (2.7) sunt $K_j(x,y) = x + a_jy + ((a-1)a_j + g)x^2 + ((c-a_j)a_j + d + 1)xy + ((f+1)a_j + b)y^2$.

Dacă $a = 1$ şi $f = -2$, atunci sistemul cubic (2.1) are un fascicol format din trei drepte invariante $1 + a_j x - y = 0$, unde $a_j,\ j = 1, 2, 3$ sunt soluţiile ecuaţiei

$$A^3 - cA^2 + (m - d - 1)A + g + q = 0.$$

În cele ce urmează vom presupune că sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante paralele, adică se realizează setul de condiţii (2.5).

2.2. Condiţii de existenţă a două drepte invariante paralele şi a unei cubice invariante ireductibile

Fie sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante paralele l_1 şi l_2. Conform Lemei 2.1, fără a restrânge generalitatea, putem considera că dreptele au forma (2.6)

$$l_{1,2} \equiv 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0,$$

iar sistemul cubic (2.1) se scrie sub forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\,(1 + cx + mx^2) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -\,(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + y^3) \equiv Q(x, y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

În continuare, pentru sistemul cubic (2.12), vom determina condiţiile de existenţă a unei cubice invariante ireductibile

$$\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0, \tag{2.13}$$

unde $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0$ şi $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03} \in \mathbb{R}$.

Conform Definiţiei 1.1, cubica (2.13) este o cubică invariantă pentru sistemul (2.12) dacă există aşa un polinom $K(x, y) = c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$, numit cofactorul cubicei invariante, încât în x şi y are loc identitatea

$$P(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv \Phi(x, y)(c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{10}x + c_{01}y). \tag{2.14}$$

Egalând în (2.14) coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale monoamelor x^iy^j, reducem această identitate la un sistem format din cincisprezece ecuaţii $\{F_{ij} = 0\}$ în raport cu necunoscutele $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}$. Din aceste ecuaţii determinăm coeficienţii cofactorului $K(x, y)$:

$$\begin{aligned} &c_{10} = -a_{21},\ c_{01} = a_{12} - 2b,\ c_{20} = (a_{30} - g)a_{21}, \\ &c_{11} = a_{03}(a_{21} - 3d) - a_{12}(a_{12} - c) - 2n,\ c_{02} = -a_{03}(a_{12} + b) - 2l, \end{aligned}$$

iar $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$ sunt soluţiile următorului sistem de ecuaţii algebrice:

$$\begin{aligned}
F_{50} &\equiv (a_{30}^2 - a_{30}g + s)a_{21} = 0,\\
F_{41} &\equiv ((3d - a_{21})a_{03} + (a_{12} - c)a_{12} - a_{21}^2 + 3m + 2n)a_{30} +\\
&+(ga_{21} - q)a_{21} - 2sa_{12} = 0,\\
F_{32} &\equiv ((c - g + a_{30})a_{21} + 2q)a_{12} - (a_{12}^2 + 2m + n)a_{21} + ((a_{21} - 3d)a_{21} -\\
&-(a_{12} + b)a_{30} + 3s)a_{03} - 2la_{30} = 0,\\
F_{23} &\equiv ((b + g - a_{30})a_{21} + 3(da_{12} - q))a_{03} + (a_{12}^2 - ca_{12} + m)a_{12} + la_{21} = 0,\\
F_{14} &\equiv [(3d - a_{21})a_{03} + (b - c + 2a_{12})a_{12} - n]a_{03} = 0,\\
F_{05} &\equiv (a_{03}a_{12} + ba_{03} - l)a_{03} = 0,\\
F_{31} &\equiv 2(n + m - s) + (a_{21} - d)a_{21} + (2b + 3c)a_{30} - (a_{21} - 3d)a_{03} -\\
&-(c + 2g + a_{30} - a_{12})a_{12} = 0,\\
F_{22} &\equiv (b + 2c + g - a_{30})a_{21} + 2(l - q) + (a_{03} - 2d)a_{12} + (b - 3g)a_{03} = 0,\\
F_{21} &\equiv 2(b + c - g) + 3(a_{30} - a_{12}) = 0,\\
F_{12} &\equiv 3(a_{21} - a_{03}) - 2d = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Notăm $e_1 = 27a_{03}^2a_{30}^2 - 18a_{03}a_{12}a_{21}a_{30} + 4a_{03}a_{21}^3 + 4a_{12}^3a_{30} - a_{12}^2a_{21}^2$.

Vom studia compatibilitatea sistemului (2.15) în următoarele cazuri: $\{e_1 = 0\}$; $\{e_1 \neq 0\}$.

2.2.1. Cazul $\mathbf{e_1 = 0}$

În acest caz avem următoarele patru posibilităţi:

2.2.1.1. Fie $a_{03} = a_{21} = 0$. Atunci $F_{05} \equiv F_{14} \equiv F_{50} \equiv 0$ şi $e_1 \equiv 4a_{12}^3a_{30} = 0$. Dacă $a_{12} = 0$, atunci $a_{30} \neq 0$. Din ecuaţiile $\{F_{41} = 0,\ F_{32} = 0,\ F_{12} = 0,\ F_{22} = 0\}$ ale sistemului (2.15) găsim $m = (-2n)/3$, $q = l = d = 0$, iar din ecuaţiile $\{F_{21} = 0,\ F_{31} = 0\}$ exprimăm

$$a_{30} = 2(g - c - b)/3,\ \ s = (-2b^2 - 5bc + 2bg - 3c^2 + 3cg + n)/3.$$

În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(1) $d = l = q = 0$, $m = (-2n)/3$, $s = (-2b^2 - 5bc + 2bg - 3c^2 + 3cg + n)/3$

pentru existenţa cubicei invariante $3(x^2 + y^2) + 2(g - c - b)x^3 = 0$ în sistemul (2.12).

Fie $a_{12} \neq 0$, atunci $e_1 = 0$ implică $a_{30} = 0$. Din ecuaţiile $\{F_{41} = 0,\ F_{32} = 0,\ F_{22} = 0,\ F_{12} = 0\}$ ale sistemului (2.15) obţinem $s = q = l = d = 0$. În continuare, din ecuaţiile $\{F_{21} = 0,\ F_{23} = 0,\ F_{31} = 0\}$ exprimăm $a_{12} = [2(c+b-g)]/3$, $m = [-2(c-g+b)(2b-c-2g)]/9$ şi $n = [(2b - c + 4g)(b + c - g)]/9$. În acest caz obţinem setul de condiţii

$$d = l = q = s = 0,\ m = [2(g - b - c)(2b - c - 2g)]/9,\ n = [(2b - c + 4g)(b + c - g)]/9$$

pentru existenţa unei cubice invariante, care se include în setul de condiţii (7) ($u = b+c-g$, $v = u(8u - 6b - 9d)/9$) (vezi pag. 40).

2.2.1.2. Fie $a_{03} = 0$ şi $a_{21} \neq 0$. În acest caz, $F_{14} \equiv F_{05} \equiv 0$ şi $e_1 \equiv (4a_{12}a_{30} - a_{21}^2)a_{12}^2 = 0$. Dacă $a_{12} = 0$, atunci din ecuaţiile $\{F_{12} = 0,\ F_{21} = 0,\ F_{23} = 0\}$ ale sistemului (2.15) obţinem $a_{21} = (2d)/3,\ a_{30} = [2(g - c - b)]/3,\ l = 0$. În continuare, din ecuaţiile $\{F_{32} = 0, F_{22} = 0, F_{50} = 0, F_{31} = 0, F_{41} = 0\}$ exprimăm $n,\ q,\ s,\ m,\ g$, respectiv. În acest caz pentru sistemul cubic (2.12), vom obţine setul de condiţii

$$l = 0,\ g = (2b + 5c)/2,\ m = (-d^2)/9,\ n = -2m,\ q = [(4b + 7c)d]/6,\ s = [(2b + 3c)c]/2$$

(pentru existenţa unei cubice), care se include în setul de condiţii (8) ($g = (2b + 5c)/2$).

Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci $e_1 \equiv 4a_{12}a_{30} - a_{21}^2 = 0$. Din ecuaţiile $\{F_{12} = 0,\ F_{21} = 0,\ F_{22} = 0\}$ ale sistemului (2.15) obţinem

$$a_{21} = (2d)/3,\ a_{12} = (3a_{30} + 2b + 2c - 2g)/3,\ a_{30} = (3l - bd + 3dg - 3q)/(4d).$$

În continuare, din ecuaţiile $\{F_{50} = 0, F_{32} = 0, F_{31} = 0\}$ exprimăm $s,\ n,\ m$, respectiv. Considerăm ecuaţia $F_{23} - F_{41} = 0$ care are soluţia $q = (11dg - 45l + 4cd + 7bd)/27$. Prin urmare, sistemul de ecuaţii $\{e_1 = 0,\ F_{41} = 0,\ F_{23} = 0\}$ are soluţia

$$9d^4 + 36dl(b - g - 2c) + d^2(c + 4b - 4g)(2b + 5c - 2g) - 324l^2 = 0.$$

În acest caz pentru sistemul cubic (2.12), vom obţine următorul set de condiţii

(2) $q = [((7b + 4c + 11g)d - 45l]/27$, $m = [36cl - 4d^3 + 2d(2b + 5c - 2g)(g - b)]/(9d)$, $n = [12d^3+d(7b+c-4g)(2b+5c-2g)-18l(2b+8c-5g)]/(27d)$, $s = [(18l+4dg-cd-4bd)(2b+2c+g)-3d^3]/(27d)$, $j_5 \equiv 9d^4+36dl(b-g-2c)+d^2(c+4b-4g)(2b+5c-2g)-324l^2 = 0$.

Cubica invariantă are forma

$$9d(x^2 + y^2) + (18l + 4dg - 4bd - cd)x^3 + 6d^2x^2y + (18l + 5cd - 2dg + 2bd)xy^2 = 0.$$

2.2.1.3. Fie $a_{03} \neq 0$ şi $a_{21} = 0$. În acest caz avem $F_{50} \equiv 0$ şi $e_1 \equiv (27a_{03}^2a_{30} + 4a_{12}^3)a_{30} = 0$. Din ecuaţiile $\{F_{12} = 0,\ F_{21} = 0\}$ ale sistemului (2.15) obţinem

$$a_{03} = (-2d)/3,\ a_{12} = (3a_{30} + 2b + 2c - 2g)/3.$$

Din ecuaţiile $\{F_{05} = 0, F_{22} = 0, F_{14} = 0, F_{32} = 0, F_{31} = 0\}$ exprimăm a_{30}, q, n, s, m, respectiv. Considerăm ecuaţia $F_{23} - F_{41} = 0$, care are soluţia $l = [-2d(3b + c)]/9$. Prin urmare, sistemul de ecuaţii $\{e_1 = 0, F_{41} = 0, F_{23} = 0\}$ are soluţia $g = [27d^2(2b + c) - c^3]/(54d^2)$. Astfel, obţinem următorul set de condiţii

(3) $g = [27d^2(2b + c) - c^3]/(54d^2)$, $m = (9d^2 + c^2)/3$, $n = (3bc - c^2 - 18d^2)/9$, $l = [-2d(c + 3b)]/9$, $q = -c(9d^2 + c^2)/(54d)$, $s = [-c^2(5c^2 + 6bc + 27d^2)]/(486d^2)$

pentru existenţa cubicei invariante $27d^2[3(x^2+y^2)+cxy^2-2dy^3]-c^3x^3=0$.

2.2.1.4. Fie $a_{03}a_{21}\neq 0$. Ecuaţia $e_1=0$ admite următoarea parametrizare

$$a_{30}=(a_{12}^3-1458a_{03}^3u^3-243a_{03}^2a_{12}u^2)/(27a_{03}^2),\ a_{21}=(a_{12}^2-81a_{03}^2u^2)/(3a_{03}).$$

Din ecuaţiile $\{F_{05}=0,\ F_{14}=0,\ F_{50}=0,\ F_{23}=0\}$ exprimăm l, n, s, q, respectiv. Atunci $F_{32}\equiv u[2187a_{03}^4u^2(6u^2-1)+243a_{03}^3a_{12}(15u^2-1)u+243a_{03}^3(gu-bu-d)+81a_{03}^2a_{12}^2(3u^2-1)+27a_{03}^2a_{12}(g-b+3c)-81a_{03}^2m-9a_{03}a_{12}^3u-a_{12}^4]=0$.

Fie $u=0$, atunci $F_{31}\equiv 0$, $F_{41}\equiv 0$. Din ecuaţiile $\{F_{12}=0,\ F_{21}=0,\ F_{31}=0\}$ exprimăm d, g şi m, respectiv. Obţinem că $F_{22}\equiv f_1f_2=0$, unde

$$f_1=a_{12}^3+81a_{03}^2a_{12}-27ca_{03}^2,\ f_2=27a_{03}^2-a_{12}^2.$$

Dacă $f_1=0$, atunci $c=[(81a_{03}^2+a_{12}^2)a_{12}]/(27a_{03}^2)$ şi obţinem următorul set de condiţii

(4) $d=(a_{12}^2-3a_{03}^2)/(2a_{03}),\ l=a_{03}(a_{12}+b),\ g=(81a_{03}^2a_{12}+54ba_{03}^2+5a_{12}^3)/(54a_{03}^2)$, $c=[(81a_{03}^2+a_{12}^2)a_{12}]/(27a_{03}^2)$, $m=(9a_{03}^2+a_{12}^2)^2/(12a_{03}^2)$, $n=(9a_{03}^2a_{12}^2+54ba_{03}^2a_{12}-243a_{03}^4-2a_{12}^4)/(54a_{03}^2)$, $q=[(243a_{03}^4+198a_{03}^2a_{12}^2+108ba_{03}^2a_{12}+7a_{12}^4)a_{12}]/(324a_{03}^3)$, $s=[(27a_{03}^2a_{12}+18ba_{03}^2+a_{12}^3)a_{12}^3]/(486a_{03}^4)$

pentru existenţa cubicei invariante $27a_{03}^2(x^2+y^2)+(a_{12}x+3a_{03}y)^3=0$.

Dacă $f_1\neq 0$, iar $f_2=0$, atunci $a_{12}^2=27a_{03}^2$. În acest caz $a_{03}=d/12$ şi pentru sistemul cubic (2.12), vom obţine următorul set de condiţii

(5) $g=b+c$, $l=[d(a_{12}+b)]/12$, $m=(8ca_{12}-3d^2)/4$, $n=(16ba_{12}-16ca_{12}+9d^2)/16$, $q=[d(3b+4c-5a_{12})]/4$, $s=(16ba_{12}+16ca_{12}-3d^2)/16$, $16a_{12}^2-3d^2=0$.

Cubica invariantă are forma $12d^2(x^2+y^2)+(4a_{12}x+dy)^3=0$.

Fie $u\neq 0$. Atunci exprimăm m, d, g din ecuaţiile $\{F_{32}=0,\ F_{12}=0,\ F_{21}=0\}$, respectiv. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{31} şi F_{22} în raport cu c şi obţinem $Res(F_{31},F_{22},c)=-486a_{03}^2g_1g_2g_3$, unde $g_1=(9a_{03}u+a_{12})^2+9a_{03}^2\neq 0$, $g_2=(18a_{03}u+a_{12})^2+9a_{03}^2\neq 0$, $g_3=(18(18a_{03}u+a_{12})(9u^2+1)a_{03}^2-(12a_{03}u+a_{12})a_{12}^2)a_{12}+243(45u^4+6u^2+1)a_{03}^4$.

Fie $g_3=0$. Această ecuaţie admite următoarea parametrizare

$$a_{12}=[(a_{03}(729v^4+54v^2+5)]/(8v),\ u=(1-18v^2-243v^4)/(24v),$$

iar ecuaţiile $\{F_{31}=0,\ F_{22}=0\}$ au soluţia $c=[(39366v^6+2187v^4+324v^2-1)a_{03}]/(216v^3)$.

În acest caz pentru sistemul cubic (2.12) vom obţine următorul set de condiţii

(6) $c=[(39366v^6+2187v^4+324v^2-1)a_{03}]/(216v^3)$, $d=[(729v^4+42v^2+1)a_{03}]/(8v^2)$, $g=[(19683v^6+6561v^4+729v^2-5)a_{03}+432bv^3]/(432v^3)$, $l=[((729v^4+54v^2+$

$5)a_{03} + 8bv)a_{03}]/(8v)$, $m = [(27v^2 - 1)^3(9v^2 + 1)^2a_{03}^2]/(192v^4)$, $n = [(531441v^8 + 367416v^6 + 20898v^4 + 288v^2 + 5)a_{03} + bv^3(157464v^4 + 11664v^2 + 1080)a_{03}]/(1728v^4)$, $q = [((43046721v^{10} + 6908733v^8 + 800442v^6 + 38394v^4 + 693v^2 - 7)a_{03} + bv^3(629856v^4 + 46656v^2 + 864))a_{03}]/(10368v^5)$, $s = [((6561v^6 + 729v^4 + 135v^2 - 1)a_{03} + 144bv^3)(2187v^4 + 162v^2 - 1)a_{03}]/(31104v^6)$

pentru existenţa cubicei invariante

$$216v^3(x^2 + y^2) + a_{03}(2187v^4x + 162v^2x - x + 24vy)(x + 3vy)^2 = 0.$$

2.2.2. Cazul $\mathbf{e_1 \neq 0}$

În acest caz avem următoarele patru posibilităţi:

2.2.2.1. Fie $a_{03} = a_{21} = 0$. Atunci $F_{05} \equiv F_{14} \equiv F_{50} \equiv 0$ şi $e_1 \equiv 4a_{12}^3a_{30} \neq 0$. Din ecuaţiile $\{F_{12} = 0,\ F_{22} = 0,\ F_{21} = 0\}$ ale sistemului (2.15) obţinem $d = 0$, $q = l$, $a_{30} = (3a_{12} - 2b - 2c + 2g)/3$, iar $F_{32} \equiv l(b + c - g) = 0$.

Dacă $g = b + c$, cubica se descompune în factori şi acest caz nu prezintă interes. Fie $b + c - g \neq 0$ şi efectuăm notaţiile $u = b + c - g$, $v = s - n - m$. Atunci ecuaţiile $F_{32} = 0$ şi $F_{31} = 0$ au soluţiile $l = 0$ şi $a_{12} = (2bu + 3cu + 3v)/(4u)$, respectiv. Exprimăm n din $F_{23} = 0$ şi s din $F_{41} = 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(7) $d = l = q = 0$, $g = b + c - u$, $m = [(3cu + 2bu + 3v)(cu - 2bu - 3v)]/(16u^2)$, $n = [(2bu - cu - 3v)(2bu + 3cu + 3v)]/(16u^2)$, $s = [(8u^2 - 9cu - 6bu - 9v)v]/(8u^2)$

pentru existenţa în sistemul (2.12) a cubicei invariante

$$12u(x^2 + y^2) + x[(9v + 6bu + 9cu - 8u^2)x^2 + 3(3v + 2bu + 3cu)y^2] = 0$$

2.2.2.2. Fie $a_{03} = 0$, $a_{21} \neq 0$. În acest caz avem $F_{14} \equiv F_{05} \equiv 0$ şi $e_1 \equiv (4a_{12}a_{30} - a_{21}^2)a_{12} \neq 0$. Din ecuaţiile $\{F_{12} = 0, F_{21} = 0, F_{22} = 0\}$ ale sistemului (2.15) obţinem $a_{21} = (2d)/3$, $a_{30} = (3a_{12} - 2b - 2c + 2g)/3$, $a_{12} = (5bd + 8cd + dg + 9l - 9q)/(12d)$. În continuare, din ecuaţiile $\{F_{50} = 0, F_{32} = 0, F_{31} = 0\}$ exprimăm s, n, m, respectiv.

Considerăm ecuaţia $F_{23} - F_{41} = 0$, care are soluţia $l = (11dg - 27q + 4cd + 7bd)/45$. Prin urmare, sistemul de ecuaţii $\{F_{41} = 0, F_{23} = 0, e_1 \neq 0\}$ are soluţia $q = [d(2b - c + 6g)]/12$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(8) $l = [d(2b - 2g + 5c)]/36$, $q = [d(2b + 6g - c)]/12$, $m = [(c + 2g - 2b)(2b + 5c - 2g) - 4d^2]/36$, $n = [(2b + 5c - 2g)g - 12m]/6$, $s = [(c - 2b + 2g)(2b + 4g - c)]/36$.

Cubica invariantă este $6(x^2 + y^2) + x[(c + 2g - 2b)x^2 + 4dxy + (2b - 2g + 5c)y^2] = 0$.

2.2.2.3. Fie $a_{03} \neq 0,\ a_{21} = 0$. În acest caz avem $F_{50} \equiv 0$ şi $e_1 \equiv (27a_{03}^2 a_{30} + 4a_{12}^3)a_{30} \neq 0$. Din ecuaţiile $\{F_{12} = 0,\ F_{21} = 0,\ F_{22} = 0\}$ găsim $a_{03} = (-2d)/3,\ a_{30} = (3a_{12} - 2b - 2c + 2g)/3$, $a_{12} = (3l - 3q - bd + 3dg)/(4d)$, iar din ecuaţiile $\{F_{05} = 0,\ F_{31} = 0,\ F_{32} = 0,\ F_{14} = 0\}$ exprimăm $q,\ m,\ s,\ n$, respectiv.

Considerăm ecuaţia $F_{23} - F_{41} = 0$, care are soluţia $l = [-2d(3b + c)]/9$. Prin urmare, sistemul de ecuaţii $\{F_{41} = 0,\ F_{23} = 0,\ e_1 \neq 0\}$ nu este compatibil.

2.2.2.4. Fie $a_{03}a_{21} \neq 0$ şi $e_1 \neq 0$. Din ecuaţiile $\{F_{50} = 0,\ F_{23} = 0,\ F_{14} = 0,\ F_{05} = 0\}$ exprimăm $s,\ q,\ n,\ l$, respectiv. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{41} şi F_{32} în raport cu m şi obţinem $Res(F_{41}, F_{32}, c) = 3a_{03}e_1h_1$, unde $h_1 = a_{12} + a_{30} + b - g$.

Fie $h_1 = 0$, adică $a_{12} = g - b - a_{30}$, atunci $F_{41} \equiv i_1 i_2$, unde $i_1 = a_{03}(a_{21} - 3d) - a_{30}^2 + a_{30}(2g - 2b - c) - b^2 - bc + 2bg + cg - g^2 - m$, $i_2 = (9a_{03} + a_{21})a_{30} + a_{21}(b - g)$.

Să admitem că $i_1 = 0$. Din ecuaţiile $\{i_1 = 0,\ F_{21} = 0,\ F_{12} = 0\}$ exprimăm $m,\ a_{30},\ a_{21}$, respectiv. În acest caz avem $F_{32} \equiv 0$ şi $F_{22} \equiv (b + c - g)(6a_{03} + d) = 0$.

Fie $g = b + c$, atunci $F_{31} \equiv d(12a_{03} - d) = 0$. Dacă $d = 0$, atunci cubica se descompune în factori. Dacă $a_{03} = d/12$, atunci obţinem următorul set de condiţii

$$(9)\quad g = b+c,\ l = [(c+2b)d]/24,\ m = (4c^2 - 3d^2)/16,\ n = (3d^2 + 8bc)/16,\ q = 9l,\ s = m+n$$

pentru existenţa cubicei invariante $12(x^2 + y^2) + 6cx^3 + 6cxy^2 + 9dx^2y + dy^3 = 0$.

Fie $g \neq b + c$, atunci $F_{22} = 0$ implică $a_{03} = (-d)/6$, iar $F_{31} \equiv (b + c - g)^2 + d^2 \neq 0$.

Să admitem că $i_1 \neq 0$, iar $i_2 = 0$. Din ecuaţia $i_2 = 0$ obţinem $g = (9a_{03}a_{30} + a_{21}a_{30} + ba_{21})/a_{21}$, iar $F_{32} \equiv e_1 \neq 0$, unde $e_1 = 27a_{03}a_{30}^2 - a_{21}^3$. În acest caz sistemul de ecuaţii (2.15) nu este compatibil. Astfel a fost demonstrată următoarea afirmaţie

Teorema 2.1. *Sistemul diferenţial cubic (2.15) are două drepte invariante paralele (2.6) şi o cubică invariantă ireductibilă (2.13) dacă şi numai dacă se realizează cel puţin unul din seturile de condiţii* (1) – (9).

2.3. Condiţii de centru pentru sistemele cubice cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă

Fie sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante paralele (2.6) şi o cubică invariantă ireductibilă (2.13), adică se realizează condiţiile Teoremei 2.1. În cele ce urmează vom determina unele condiţii de existenţă a centrului pentru (2.1) în punctul singular $O(0,0)$.

Lema 2.3. *Pentru ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul cubic* (2.1) *este suficient să se realizeze cel puţin unul dintre următoarele două seturi de condiţii:*

(i) $a = f = k = p = r = d = l = q = 0$, $s = (-2b^2 - 5bc + 2bg - 3c^2 + 3cg + n)/3$, $m = (-2n)/3$;

(ii) $a = f = k = p = r = l = 0$, $g = [b(b^2 - d^2)]/(2d^2)$, $m = 3(b^2 + d^2)$, $c = -3b$, $n = (-2m)/3$, $q = (bm)/(6d)$, $s = (-b^2 m)/(6d^2)$.

Demonstraţie. În cazurile (i) şi (ii) sistemul (2.1) posedă două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă. Sistemul (2.1) este Darboux integrabil şi are integrală primă de forma

$$l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3} = C.$$

În cazul (i): $l_{1,2} = 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m}\,)x$, $\Phi = 3(x^2 + y^2) - 2(b + c - g)x^3$ şi $\alpha_1 = -4b - 3c + 3\sqrt{c^2 - 4m}$, $\alpha_2 = 4b + 3c + 3\sqrt{c^2 - 4m}$, $\alpha_3 = -2\sqrt{c^2 - 4m}$.

În cazul (ii): $l_{1,2} = 2 - (3b \pm i\sqrt{3b^2 + 12d^2})x$, $\Phi = 3d^2(x^2 + y^2) + b^3x^3 - 3bd^2xy^2 - 2d^3y^3$ şi $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$. □

Lema 2.4. *Următoarele două serii de condiţii sunt suficiente ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul cubic (2.1):*

(i) $a = f = k = p = r = 0$, $l = [(5b + 4g - c)d]/9$, $m = 2(b + g)(c - 2b - 2g)$, $q = [(c-g-2b)d]/3, n = [(2b+4g-c)(5b+4g-c)]/3$, $s = [(2b+g-c)(c-2b-4g)]/9$, $d^2 = (2b + 4g - c)(4b + 2g + c)$;

(ii) $a = f = k = p = r = l = 0$, $g = b + c$, $n = b(b + g)$, $m = -2b(b + g)$, $s = -b(b + g)$, $q = d(b + g)$, $16b^2 - 3d^2 = 0$.

Demonstraţie. În fiecare din cazurile (i) şi (ii) sistemul (2.1) este Darboux integrabil şi are factor integrant de forma

$$\mu = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3}.$$

În cazul (i): $l_1 = 1 + 2(b+g)x$, $l_2 = 1 - (2b+2g-c)x$, $\Phi = 3(x^2+y^2) + x[(2b+4g-c)x^2 + 2dxy + (4b+2g+c)y^2]$ şi $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = (-3)/2,\ \alpha_3 = (-1)/2$.

În cazul (ii): $l_1 = 1 - 2bx,\ l_2 = 1 + (c+2b)x,\ \Phi = 12d^2(x^2+y^2) - (4bx - dy)^3$ şi $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = (-4)/3$. □

Lema 2.5. *Pentru ca punctul singular $O(0,0)$ să fie centru pentru sistemul cubic (2.1) este suficient să se realizeze cel puţin unul dintre următoarele două seturi de condiţii:*

(i) $a = f = k = p = r = 0,\ c = 2b+2g,\ l = [(b+c)d]/9,\ q = (dg)/3,\ s = (2g^2)/9,\ m = (12bg + 8g^2 - d^2)/9,\ n = [2(d^2 - 3bg - 2g^2)]/9;$

(ii) $a = f = k = p = r = l = q = s = 0$, $g = -b$, $c = -2b$, $m = (16b^2 - 3d^2)/16$, $n = -m$.

Demonstraţie. În fiecare dintre cazurile (i) şi (ii) sistemul (2.1) este Darboux integrabil şi are integrală primă de forma $l_3^{\alpha_3}\Phi = C$.

În cazul (i): $l_3 = 3 + 2gx + dy,\ \Phi = 3(x^2+y^2) + x[2gx^2 + 2dxy + (6b+4g)y^2]$ şi $\alpha_3 = -2$.

În cazul (ii): $l_3 = 4 - 4bx + dy,\ \Phi = 12(x^2+y^2) - 12bx^3 - 12bxy^2 + 9dx^2y + dy^3$ şi $\alpha_3 = -3$. □

Lema 2.6. *Următorul set de condiţii este suficient încât originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul cubic (2.1):*

$$a = f = k = p = r = d = l = q = 0,\ m = [(3cu+2bu+3v)(cu-2bu-3v)]/(16u^2),\ g = b+c-u,\ n = [(2bu-cu-3v)(2bu+3cu+3v)]/(16u^2),\ s = [(8u^2-9cu-6bu-9v)v]/(8u^2).$$

Demonstraţie. Sistemul (2.1) posedă două drepte invariante paralele

$$l_1 = 4u + (3v + 2bu + 3cu)x,\ l_2 = 4u + (cu - 2bu - 3v)x$$

şi o cubică invariantă

$$\Phi = 12u(x^2+y^2) + x[(9v + 6bu + 9cu - 8u^2)x^2 + 3(3v + 2bu + 3cu)y^2].$$

El este invariant la transformarea $(x,y,t) \to (x,-y,-t)$ şi este simetric faţă de axa Ox. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este centru. □

În continuare vom determina numărul minim de mărimi Lyapunov necesare, încât anularea lor să implice existenţa centrului în originea sistemului de coordonate.

Teorema 2.2. *Fie sistemul cubic (2.1) posedă două drepte invariante paralele (2.6) şi o cubică invariantă ireductibilă (2.13). Atunci punctul singular $O(0,0)$ este centru dacă şi numai dacă primele două mărimi Lyapunov se anulează.*

Demonstraţie. Pentru demonstrarea teoremei, calculăm primele două mărimi Lyapunov L_1 şi L_2 în fiecare din seriile de condiţii (1)−(9) după algoritmul descris în Cozma [31]. În expresia pentru L_j vom neglija numitorii şi factorii nenuli.

În cazul (1) prima mărime Liapunov se anulează, şi avem condiţiile din Lema 2.3, (i).

În cazul (2) din anularea primei mărimi Liapunov obţinem $l = [d(5b-c+4g)]/9$. Atunci avem Lema 2.4, (i).

În cazul (3), mărimea $L_1 = 0$ implică $c = -3b$. Atunci avem Lema 2.3, (ii).

În cazul (4) din anularea primei mărimi Liapunov obţinem

$$b = [a_{12}(a_{12}^4 - 243a_{03}^4)]/[27a_{03}^2(9a_{03}^2 - a_{12}^2)].$$

A doua mărime Liapunov este $L_2 = 27a_{03}^2 - a_{12}^2$. Dacă $L_2 = 0$, atunci $m = c^2/4$, ceea ce este în contradicţie cu presupunerea din Lema 2.1. Prin urmare, $O(0,0)$ este focar.

În cazul (5) prima mărime Liapunov este $L_1 = a_{12} + b$. Dacă $a_{12} = -b$, atunci $L_1 = 0$ şi avem Lema 2.4, (ii).

În cazul (6) din anularea primei mărimi Liapunov obţinem $b = [a_{03}(1 - 885735v^8 - 183708v^6 - 5346v^4 - 108v^2)]/[216v^3(729v^4 + 18v^2 + 1)]$. A doua mărime Liapunov este $L_2 = f_1 f_2$, unde $f_1 = 27v^2 - 1$, $f_2 = 531441v^8 + 78732v^6 + 23814v^4 + 108v^2 + 1$. Dacă $f_1 = 0$, atunci $(k, l, m, n, p, q, r, s) = 0$ şi sistemul (2.1) devine un sistem pătratic. Ecuaţia $f_2 = 0$ nu are soluţii reale. Prin urmare, punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (7) prima mărime Liapunov se anulează. Obţinem condiţiile din Lema 2.6, (i).

În cazul (8) prima mărime Liapunov este $L_1 = 2b + 2g - c$. Dacă $c = 2(b + g)$, atunci avem Lema 2.5, (i).

În cazul (9), obţinem că $L_1 = 2b + c$. Dacă $L_1 = 0$, atunci avem Lema 2.5, (ii). □

Ţinând cont de Teorema 2.2, condiţiile necesare şi suficiente ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul (2.1) sunt rezumate în următoarea teoremă.

Teorema 2.3. *Originea sistemului de coordonate este centru pentru sistemul cubic (2.1), cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă (2.13) dacă şi numai dacă se realizează cel puţin unul dintre seturile de condiţii din Lemele 2.3–2.6.*

Următorul exemplu ne arată că pentru existenţa centrului cerinţa ca primele două mărimi Lyapunov să se anuleze este esenţială. Sistemul cubic

$$\dot{x} = y(25c^2x^2 + 108cx + 108)/108, \; c \neq 0,$$
$$\dot{y} = -(1296x + 1242cx^2 + 936cxy - 702cy^2 + 297c^2x^3 + 417c^2x^2y - 221c^2xy^2 - 9c^2y^3)/1296$$

are două drepte invariante paralele $18+c(9\pm\sqrt{6}\,)x=0$ şi o cubică invariantă ireductibilă $54(x^2+y^2)+c(3x+y)^3=0$, iar în punctul singular $O(0,0)$ avem că $L_1=0$ şi $L_2=(-5c^4)/648\neq 0$, adică acest punct singular este de tip focar.

Dacă nu se realizează condiţiile din Teorema 2.3 şi $L_1=0$, atunci $L_2\neq 0$. În acest caz $O(0,0)$ este focar slab de multiplicitatea maximală doi şi din origine pot fi bifurcate cel mult două cicluri limită de amplitudine mică.

În rezolvarea problemei centrului pentru sistemul cubic (2.1), cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă (2.13), un rol determinant l-a avut integrabilitatea Darboux şi reversibilitatea, ceea ce se confirmă de următoarea teoremă.

Teorema 2.4. *Orice sistem cubic cu puncte singulare de tip centru, două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă (2.13), este Darboux integrabil sau reversibil.*

2.4. Concluzii la capitolul 2

Capitolul 2 este dedicat rezolvării problemei centrului pentru familia de sisteme diferenţiale cubice cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă. În el pentru familia dată a fost soluţionată problema consecutivităţilor centrice:

– au fost obţinute 9 seturi de condiţii necesare şi suficiente încât sistemul cubic (2.1) să posede două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă;

– s-a demonstrat că ciclicitatea punctului singular $O(0,0)$ în sistemul cubic (2.1) cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă este cel mult doi;

– au fost obţinute 7 seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului în sistemul cubic (2.1) cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă;

– s-a demonstrat că orice centru în sistemul cubic (2.1) cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă rezultă din integrabilitatea Darboux sau din reversibilitate.

Rezultatele expuse în acest capitol au fost publicate în lucrările [47], [38], [51].

3. SISTEME CUBICE CU UN FASCICOL DIN DOUĂ DREPTE INVARIANTE ŞI O CUBICĂ INVARIANTĂ

În acest capitol pentru sistemul diferenţial cubic (2.1) cu punctul singular $O(0,0)$ de tip centru sau focar sunt obţinute condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a unui fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă. Se determină ciclicitatea punctului singular $O(0,0)$ şi se rezolvă problema centrului cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă. Se demonstrează că $(1+a_1x-y,\ 1+a_2x-y,\ x^2+y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2-y^3;\ N=3)$ este o consecutivitatea centrică.

3.1. Condiţii de existenţă a unui fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă, cazul $f \neq -2$

Fie sistemul diferenţial cubic (2.1) are două drepte invariante l_1, l_2 concurente ce se intersectează în punctul singular real (x_0, y_0). Conform Secţiunii 2.1, fără a restrânge generalitatea, dreptele pot fi luate în forma (2.7), adică să treacă prin punctul singular $(0,1)$:

$$l_j \equiv 1 + a_jx - y = 0,\ a_j \in \mathbb{C},\ j = 1,2;\ a_2 - a_1 \neq 0. \tag{3.1}$$

Conform Lemei 2.2, dreptele (3.1) sunt drepte invariante pentru sistemul (2.1) dacă şi numai dacă se realizează condiţiile (2.11). În acest caz sistemul cubic (2.1) se scrie sub forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + [(a-1)(a_1+a_2)+g]x^3 + \\
&\quad + [d + 2 - a - a_1^2 - (a_1+a_2)(a_2-c)]x^2y + \\
&\quad + [(f+2)(a_1+a_2) + b - c]xy^2 - (f+1)y^3 \equiv P(x,y), \\
\dot{y} &= -x - gx^2 - dxy - by^2 + (a-1)a_1a_2x^3 + [g + a_1a_2(c - \\
&\quad - a_1 - a_2)]x^2y + [(f+2)a_1a_2 + d + 1]xy^2 + by^3 \equiv Q(x,y).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

În cele ce urmează, pentru sistemul cubic (3.2), vom determina condiţiile de existenţă a unei cubice invariante de forma (2.13) ce trece prin punctul singular $(0,1)$, adică formează cu dreptele invariante (3.1) un fascicol de curbe. Pentru ca cubica (2.13) să treacă prin punctul singular $(0,1)$, vom cere ca $a_{03} = -1$, atunci ea are forma

$$\Phi(x,y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 - y^3 = 0. \tag{3.3}$$

Conform Definiţiei 1.1, cubica (3.3) este o cubică invariantă pentru sistemul (3.2) dacă există aşa un polinom $K(x,y) = c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$, numit cofactorul cubicei invariante, încât în x şi y are loc identitatea

$$P(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} \equiv \Phi(x,y)(c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{10}x + c_{01}y). \tag{3.4}$$

Egalând în (3.4) coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale monoamelor x^iy^j, vom reduce această identitate la un sistem format din cincisprezece ecuaţii $\{F_{ij} = 0\}$ în raport cu necunoscutele $a_{30}, a_{21}, a_{12}, c_{20}, c_{11}, c_{02},\ c_{10}, c_{01}$. Din el aflăm d, g şi coeficienţii cofactorului

$$\begin{aligned}
c_{20} &= [2(f+1)a_{12}(a_{12}^2 + 3a_{21}) - 2((f+2)(a_1+a_2) - c)(a_{12}^2 + 2a_{21}) + \\
&+ a_{12}(2a - 11 + 2(a_1+a_2)^2 + 2a_1a_2(f+1) - 2c(a_1+a_2)) + \\
&+ 3a_{30}(2f+5) + 6(b + c(a_1a_2+1) - a_1a_2(a_1+a_2))]/2, \\
c_{11} &= [2(f+1)a_{12}^2 - 2a_{12}((f+2)(a_1+a_2) - c) + a_{21}(4f+13) + \\
&+ 3(5 - 2a + 2f + 2a_1a_2(f+2))]/2, \\
c_{02} &= (f+1)a_{12} + 3b,\ c_{10} = 2a - a_{21},\ c_{01} = a_{12} - 2b, \\
d &= (3a_{21} - 2a + 2f + 3)/2,\ g = (3a_{30} - 3a_{12} + 2b + 2c)/2,
\end{aligned}$$

iar a_{30}, a_{21}, a_{12} sunt soluţiile sistemului de ecuaţii algebrice:

$$\begin{aligned}
F_{50} &\equiv a_{30}(a_{12}^2 + 2a_{21})((f+2)(a_1+a_2) - c) + (a_{21}a_1a_2 - a_{12}a_{30})(a-1) - \\
&- a_{30}(a_{12}^3 + 3a_{12}a_{21} + 3a_{30})(f+1) + 3a_{30}(a_1+a_2)(a_1a_2 + a - 1) + \\
&+ a_{12}a_{30}((a_1+a_2)(c - a_1 - a_2) - a_1a_2(f+1)) - 3ca_{30}a_1a_2 = 0, \\
F_{41} &\equiv (a_{12}^2a_{21} + a_{12}a_{30} + 2a_{21}^2)((f+2)(a_1+a_2) - c) - \\
&- (f+1)(a_{12}^3a_{21} + a_{12}^2a_{30} + 3a_{12}a_{21}^2 + 5a_{21}a_{30}) + \\
&+ 2a_{21}(a_1+a_2)(a_1a_2 - 1 + a) - 2a_1a_2(ca_{21} - a_{12}(a-1)) - \\
&- (a_{12}a_{21} + 3a_{30})(a - 1 + a_1a_2(f+1) + (a_1+a_2)(a_1+a_2-c)) = 0, \\
F_{32} &\equiv (a_{12}^3 + 3a_{12}a_{21} + 3a_{30})((f+2)(a_1+a_2) - c) + \\
&+ a_{12}(a_1a_2 + a - 1)(a_1+a_2) + a_1a_2(3 - 3a - ca_{12}) - \\
&- (a_{12}^4 + 4a_{12}^2a_{21} + 4a_{12}a_{30} + 2a_{21}^2)(f+1) - \\
&- (a_{12}^2 + 2a_{21})(a - 1 + a_1a_2(f+1) + (a_1+a_2)(a_1+a_2-c)) = 0;
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
F_{40} &\equiv 2a_{12}^2((f+2)(a_1+a_2)-(f+1)a_{12}-c)-3a_{12}a_{21}(2f+1)+\\
&+a_{12}(5-2a+2c(a_1+a_2)-2(a_1+a_2)^2-2(f+1)a_1a_2)+\\
&+2a_{21}(2(f+2)(a_1+a_2)-b-3c)+a_{30}(2a-6f-9)+\\
&+4(a_1+a_2)(a-1)-a_{21}a_{30}+6a_1a_2(a_1+a_2-c)-2b-2c=0,\\
F_{31} &\equiv (4b+6c)a_{30}-(2f-4)a_{12}^2-8a_{12}a_{30}+2a_{21}(a-3f-5)+\\
&+2a_{12}((a_1+a_2)(f+2)-2b-3c)+a_1a_2(4a-6f-20)-\\
&-a_{21}^2-4(a_1^2+a_2^2)+4c(a_1+a_2)-2a-2f-1=0,\\
F_{22} &\equiv a_{12}^2((f+1)a_{12}-(f+2)(a_1+a_2)+c)+3a_{12}a_{21}(f+2)+\\
&+a_{12}((a_1+a_2)^2+(f+1)a_1a_2-c(a_1+a_2)+3f+6)-\\
&-(a_{21}+1)(b+2(f+2)(a_1+a_2))-a_1a_2(a_1+a_2-c)=0,\\
F_{13} &\equiv (a_{12}-a_1)(a_{12}-a_2)(f+2)=0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Notăm $j_1=a_{12}(a_1+a_2)-3a_1a_2-a_{12}^2-2a_{21}$, $j_2=f+1$, $j_3=a_2^3-a_2^2a_{12}-a_2a_{21}-a_{30}$, $j_4=a_1^3-a_1^2a_{12}-a_1a_{21}-a_{30}$, $j_5=4a_{12}^3a_{30}-a_{12}^2a_{21}^2+18a_{12}a_{21}a_{30}-4a_{21}^3+27a_{30}^2$.

Soluţiile sistemului $\{(3.5),\ (3.6)\}$ în raport cu a_{30},a_{21},a_{12}, unde $(a_{30},a_{21},a_{12})\neq 0$ ne determină cubicele invariante (3.3) ale sistemului (3.2). Totodată vom presupune că

$$(a_1-a_2)(f+2)\neq 0. \tag{3.7}$$

Ecuaţia $F_{13}=0$ din (3.6) ne implică de a fi cercetate două cazuri: $a_{12}=a_1$ şi $a_{12}=a_2$.

3.1.1. Cazul $\mathbf{a_{12}=a_1,\ a_{21}=-1}$

Fie $a_{12}=a_1$ şi $a_{21}=-1$. Atunci $F_{13}\equiv 0$ şi $F_{22}\equiv 0$. Se impun două cazuri:

$$a_2=1/a_1 \text{ şi } a_2\neq 1/a_1.$$

3.1.1.1. Fie $a_2=1/a_1$. În acest caz ecuaţia $E_1\equiv F_{31}+2F_{32}=0$ are forma

$$E_1\equiv[(f+2)a_1^2-2ba_1-3f-6](a_{30}-a_1)=0.$$

Dacă $a_{30}=a_1$, atunci cubica (3.5) este reductibilă. Dacă $a_{30}-a_1\neq 0$, atunci ecuaţia $E_1=0$ are soluţia $b=[(a_1^2-3)(f+2)]/(2a_1)$.

Calculăm rezultanta polinoamelor F_{50} şi F_{40} în raport cu f. Obţinem că $Res(F_{50},F_{40},f)=(a_{30}-a_1)(a-1)f_1f_2$, unde $f_1=a_1a_{30}-1$, $f_2=a_1^2-3a_1a_{30}-2$.

Fie $a=1$. Din $F_{40}=0$, avem $(f+1)f_2=0$. Presupunem că $f_2=0$, atunci $a_{30}=(a_1^2-2)/(3a_1)$. În acest caz $F_{50}\equiv 0$, $F_{40}\equiv 0$ şi $F_{31}\equiv(a_1^2-3)(f+1)=0$.

Dacă $a_1^2=3$, atunci obţinem următorul set de condiţii pentru sistemul (3.2)

(1) $a=1,\ b=0,\ d=f-1,\ g=(3c-4a_1)/3,\ a_1^2=3,\ a_2=a_1/3.$

Cubica invariantă are forma $12(x^2+y^2)(1-y)+(c-g)(x^3+9xy^2)=0$.

Cazul $a_1^2 \neq 3$ şi $f=-1$ implică $c=(a_1^2+1)/a_1$ şi se conţine în condiţiile (8), pag. 50.

Să admitem că $f_2 \neq 0$ şi fie $f=-1$. Atunci $F_{32}=0$ implică $c=(a_1^2+1)/a_1$ şi acest caz la fel se conţine în setul de condiţii (8).

Fie $a \neq 1$ şi $f_1=0$. Atunci $a_{30}=1/a_1$. Exprimăm a din $F_{40}=0$ şi c din $F_{32}=0$. Atunci obţinem că $F_{41} \neq 0$.

Fie $(a-1)f_1 \neq 0$ şi $f_2=0$. Atunci $a_{30}=(a_1^2-2)/(3a_1)$ şi $F_{40} \neq 0$.

3.1.1.2. $a_2 \neq 1/a_1$. În acest caz exprimăm c din $F_{40}=0$, iar relaţia $E_2 \equiv F_{32}+F_{31}=0$ ne arată astfel $E_2 \equiv ((a_1-3a_2)(f+2)-2b)(a_1-a_{30})=0$.

Dacă $a_{30}=a_1$, atunci cubica (3.5) este reductibilă. Presupunem că $a_{30}-a_1 \neq 0$. Atunci $e_2=0$ are soluţia $b=((a_1-3a_2)(f+2))/2$ şi $F_{50} \equiv (a-1)(a_2-a_{30})=0$.

Presupunem că $a_{30}=a_2=0$. Atunci $F_{32} \equiv (a_1-2)(a_1+2)(f-a+2)=0$ şi obţinem următoarele trei seturi de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(2) $b=f+2,\ c=2-a-f,\ d=f-a,\ g=1-a,\ a_1=2,\ a_2=0.$

Cubica invariantă este $x^2+y^2-y(x-y)^2=0$.

(3) $b=-f-2,\ c=a+f-2,\ d=f-a,\ g=a-1,\ a_1=-2,\ a_2=0.$

Cubica invariantă este $x^2+y^2-y(x+y)^2=0$.

(4) $c=[2b(2-a)]/a,\ d=-2,\ f=a-2,\ g=[b(1-a)]/a,\ a_1=(2b)/a,\ a_2=0.$

Cubica invariantă este $a(x^2+y^2)(y-1)-2bxy^2=0$.

Presupunem că $a_{30}=a_2$ şi $a_2 \neq 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{41} şi F_{32} în raport cu f. Obţinem că $Res(F_{41},F_{32},f)=(a_2-a_1)^2(a-1)j_5$, unde

$$j_5=4a_1^3a_2-a_1^2-18a_1a_2+27a_2^2+4.$$

Dacă $a=1$ şi $f=-1$, atunci acest caz se conţine în setul de condiţii (6), pag. 50. Dacă $a=1$ şi $f \neq -1$, atunci obţinem următorul set de condiţii

(5) $a=1,\ d=f-1,\ b=[(f+2)(a_1-3a_2)]/2,\ g=[3(a_2-a_1)+2(b+c)]/2,\ c=[2a_1a_2(a_1+a_2)+(f-1)a_1-a_2(5f+7)]/[2(a_1a_2-1)],\ F_{41} \equiv 4a_1^2a_2^2-a_1^2-6a_1a_2+15a_2^2+4=0,$ $F_{32} \equiv 2a_1^3a_2-4a_1^2a_2^2-a_1^2+6a_1a_2^3-10a_1a_2+19a_2^2+4=0.$

Cubica invariantă este $(x^2+y^2)(1-y)+x(a_1y^2+a_2x^2)=0$.

Fie $a \neq 1$ şi $j_5 = 0$. Ecuaţia $j_5 = 0$ admite următoarea parametrizare

$$a_2 = u^2(a_1 + 2u),\ a_1 = (-3u^2 - 1)/(2u).$$

În acest caz $F_{32} \equiv F_{41} \equiv ((f + 1)u^2 + 2a - f - 3)(3u^2 - 1) = 0$. Obţinem următoarele două seturi de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(6) $a = [f + 3 - (f + 1)u^2]/2,\ d = f - a,\ b = -[(f + 2)(3u^4 + 1)]/(4u),\ c = [f(u^2 + 1) + u^4 - 3u^2]/(2u),\ g = [((3f + 1)u^2 + f + 1)(1 - u^2)]/(4u),\ a_1 = (-3u^2 - 1)/(2u),\ a_2 = u^2(a_1 + 2u)$.

Cubica invariantă este $2u(x^2 + y^2) + (u^2x - 2uy - x)(ux + y)^2 = 0$.

(7) $b = (-f - 2)/(3u),\ c = (9a + 3f - 16)/(9u),\ d = f - a,\ g = (9a - 10)/(9u),\ 3u^2 - 1 = 0,\ a_1 = (-1)/u,\ a_2 = (-u)/3$.

Cubica invariantă este $9u(x^2 + y^2)(y - 1) + x(x^2 + 9y^2) = 0$.

Presupunem că $a_2(a_{30} - a_2) \neq 0$ şi $a = 1$. Atunci $F_{50} \equiv 0$. Dacă $f = -1$, atunci $F_{41} \equiv F_{32} \equiv 0$ şi obţinem următorul set de condiţii:

(8) $a = 1,\ d = -2,\ f = -1,\ a_1 = (2b + 3c)/4,\ a_2 = (c - 2b)/4$

pentru existenţa cubicei invariante

$$12(x^2 + y^2)(1 - y) + 3(2b + 3c)xy^2 + (c - 2b + 8g)x^3 = 0.$$

Presupunem că $f \neq -1$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{41} şi F_{32} în raport cu a_2. Obţinem că $Res(F_{41}, F_{32}, a_2) = -2h_1h_2^2h_3^2$, unde

$$h_1 = a_1^2 - 3a_1a_{30} - 2,\ \ h_2 = 4a_1^3a_{30} - a_1^2 - 18a_1a_{30} + 27a_{30}^2 + 4,\ \ h_3 = a_1 - a_{30} \neq 0.$$

Fie $h_1 = 0$. Atunci $F_{32} = 0$ are soluţia $a_1^2 = 3$ şi obţinem următorul set de condiţii

(9) $a = 1,\ b = [(f + 2)(a_1 - 3a_2)]/2,\ c = (a_1a_2 - f + 2)/a_1,\ d = f - 1,\ g = [(b + c)a_1 - 4]/a_1,\ a_1^2 = 3$

pentru existenţa cubicei invariante $3a_1(x^2 + y^2)(1 - y) + x^3 + 9xy^2 = 0$.

Fie $h_1 \neq 0$ şi $h_2 = 0$. Ecuaţia $h_2 = 0$ admite următoarea parametrizare $a_1 = -(3u^2 + 1)/(2u),\ a_{30} = (u^3 - u)/2$. În acest caz avem $F_{32} \equiv (2ua_2 - u^2 + 1)(a_2 + u) = 0$ şi obţinem următoarele două seturi de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(10) $a = 1,\ b = [(f + 2)(3u^2 - 1)]/(4u),\ c = (f - fu^2 - 6u^2)/(2u),\ d = f - 1,\ g = (3u^4 + fu^2 + f + 1)/(4u),\ a_1 = (-3u^2 - 1)/(2u),\ a_2 = -u$.

Cubica invariantă este $2u(x^2+y^2)+(u^2x-2uy-x)(ux+y)^2=0$.

(11) $a=1,\ b=[(f+2)(1-3u^2)]/(2u),\ c=(fu^2-1)/u,\ d=f-1,\ g=[(3u^2-2f-3)(u^2-1)]/(4u),\ a_1=(-3u^2-1)/(2u),\ a_2=(u^2-1)/(2u)$.

Cubica invariantă este $2u(x^2+y^2)+(u^2x-2uy-x)(ux+y)^2=0$.

3.1.2. Cazul $\mathbf{a_{12}=a_1,\ a_{21}\neq -1}$

Fie $a_{12}=a_1$ şi $a_{21}\neq -1$. Atunci ecuaţia $F_{22}=0$ are soluţia $b=(f+2)(a_1-2a_2)$.

3.1.2.1. Fie $j_1=0$ şi $a_{30}=(a_1a_2(a_1-2a_2))/3$. În acest caz avem $a_{21}=-a_1a_2$ şi

$$F_{50}\equiv(a-1)a_1a_2f_1f_2=0,\ F_{41}\equiv(a_1+a_2-c)a_1a_2f_1f_2=0,\ F_{32}\equiv(f+1)a_1a_2f_1f_2=0,$$

unde $f_1=a_1+a_2,\ f_2=a_1-3a_2$.

Presupunem că $a_1=0$. Atunci ecuaţia $F_{40}=0$ implică $c=2(f+1+a)a_2$ şi

$$F_{31}\equiv(2a+2f+1)(2a_2+1)(2a_2-1)=0.$$

În acest caz obţinem următoarele trei seturi de condiţii pentru existenţa cubicei invariante $x^2+y^2-y^3=0$ în sistemul (3.2):

(12) $b=-f-2,\ c=f+1+a,\ d=(2f+3-2a)/2,\ g=a-1,\ a_1=0,\ a_2=1/2$;

(13) $b=f+2,\ c=-f-a-1,\ d=(2f+3-2a)/2,\ g=1-a,\ a_1=0,\ a_2=-1/2$;

(14) $a=(-2f-1)/2,\ b=2c(-f-2),\ d=2(f+1),\ g=b+c,\ a_1=0,\ a_2=c$.

Presupunem că $a_1\neq 0$ şi $a_2=0$. Atunci $F_{40}=0$ implică $c=a_1(2a-2f-3)/2$, iar ecuaţia $F_{31}=0$ are soluţia $a=(-2f-1)/2$. Obţinem următorul set de condiţii

(15) $a=(-2f-1)/2,\ d=2(f+1),\ c=-2b(f+1)/(f+2),\ g=-b(2f+3)/(2f+4),\ a_1=b/(f+2),\ a_2=0$

pentru existenţa cubicei invariante $bxy^2+(f+2)(x^2+y^2-y^3)=0$.

Presupunem că $a_1a_2\neq 0$ şi $a_2=-a_1$. Din $F_{40}=0$, obţinem $c=a_1(a_1^2-6f-2a-7)/2$ şi $F_{31}\equiv(2a+2f+1-a_1^2)(3a_1^2-1)(a_1^2+1)=0$.

Dacă $a_1^2=1/3$, atunci obţinem următorul set de condiţii

(16) $b=3(f+2)a_1,\ c=[-a_1(3a+9f+10)]/3,\ d=f-a+2,\ g=[a_1(2-3a)]/3,\ a_2=-a_1,\ a_1^2=1/3$.

Cubica invariantă este $3(x^2+y^2)-(a_1x-y)(x^2-3y^2)=0$.

Dacă $a_1^2\neq 1/3$ şi $2a+2f+1-a_1^2=0$, atunci avem următorul set de condiţii

(17) $a = (a_1^2 - 2f - 1)/2,\ b = 3(f+2)a_1,\ c = (-2f-3)a_1,\ d = 2a + 4f + 3,\ g = (-3a - 2f)a_1,\ a_2 = -a_1.$

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 - (a_1x + y)(a_1x - y)^2 = 0$.

Presupunem că $a_1a_2(a_2 + a_1) \neq 0$ şi $a_1 = 3a_2$. Exprimăm c din $F_{40} = 0$, iar ecuaţia $F_{31} = 0$ are soluţia $2a + 2f + 1 + 3a_2^2 = 0$. În acest caz, obţinem următorul set de condiţii

(18) $b = (f+2)a_2,\ d = 2a + 4f + 3,\ g = c - a_2(a+3),\ c = a_2(1 - 2af + 17a - 2f^2 + 7f)/[3(a + f + 1)],\ 3a_2^2 + 2a + 2f + 1 = 0,\ a_1 = 3a_2.$

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 + (a_2x - y)^3 = 0$.

Presupunem că $a_1a_2(a_2 + a_1)(a_1 - 3a_2) \neq 0$. Atunci din sistemul (3.5) obţinem $a = 1$, $f = -1$, $c = a_1 + a_2$, iar sistemul de ecuaţii (3.6) nu are soluţii reale.

3.1.2.2. Fie $j_1 = 0$ şi $a_{30} \neq (a_1a_2(a_1 - 2a_2))/3$. În acest caz exprimăm c din $F_{32} = 0$ şi a din $F_{41} = 0$. Obţinem $F_{50} \equiv j_2j_3j_4j_5 = 0$.

Admitem că $j_2 = 0$. Atunci $f = -1$, iar ecuaţia $F_{40} = 0$ are soluţia $a_{30} = -b$. În acest caz sistemul de ecuaţii (3.6) nu are soluţii reale.

Presupunem că $j_2 \neq 0$ şi fie $j_3 = 0$. În acest caz $a_{30} = a_2^3$ şi sistemul (3.6) este compatibil dacă $(a_1 - a_2)(f + 2) = 0$, ceea ce contrazice cu presupunerea (3.7).

Admitem că $j_2j_3 \neq 0$ şi fie $j_4 = 0$, atunci $a_{30} = a_1^2a_2$. Acest caz se conţine în setul de condiţii (27), pag. 55.

Presupunem că $j_2j_3j_4 \neq 0$ şi fie $j_5 = 0$. Atunci ecuaţia $j_5 = 0$ admite următoarea parametrizare $a_2 = v(36 - 5v)/(12u(v - 9)),\ a_1 = (v - 9)/u,\ a_{30} = v^2(4v - 27)/(108u^3)$. Obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(19) $a = (18u^2 - v(f+1)(4v - 27))/(18u^2),\ c = (2fv - 18f + v)(54 - 7v)/[12(v - 9)u],\ b = [(f+2)(11v^2 - 144v + 486)]/[6(v-9)u],\ g = [(4v - 27)v^2 + 72u^3(c + b) - 108(v - 9)u^2]/(72u^3),\ d = [4(2f + 3 - 2a)u^2 + v(5v - 36)]/(8u^2),\ f = [3888(v-9)u^4 + 72u^2(128v^3 - 2889v^2 + 21384v - 52488) - v^3(167v^2 - 2277v + 7776)]/[2592u^4(9 - v) - 72u^2(62v^3 - 1431v^2 + 10692v - 26244) + 8v^2(4v - 27)^2(2v - 9)],\ F_{40} \equiv 1296(v-9)^2u^4 - 36vu^2(11v^2 - 144v + 486)(5v - 36) - v^3(47v^2 - 603v + 1944)(v - 9) = 0,\ a_2 = v(36 - 5v)/(12u(v - 9)),\ a_1 = (v - 9)/u.$

Cubica invariantă este $108u^3(x^2 + y^2) + (4vx - 27x - 3uy)(vx + 6uy)^2 = 0$.

3.1.2.3. Fie $j_2 = 0$ şi $j_1 \neq 0$. În acest caz $f = -1$. Exprimăm a din $F_{32} = 0$ şi obţinem

$$\begin{aligned} F_{50} \equiv &[4a_{21}^2a_{30} + a_{21}^2a_1a_2(a_1 - 2a_2) + 2a_{21}a_{30}(a_1^2 + 5a_1a_2 - 3a_2^2)+ \\ &+3a_{30}^2(2a_1 + 3a_2) + 4a_{30}a_1^2a_2^2](c - a_1 - a_2) = 0, \\ F_{41} \equiv &[4a_{21}^3 + a_{21}^2(a_1^2 + 6a_1a_2 - 4a_2^2) + 2a_{21}a_{30}(3a_2 - 2a_1)+ \\ &+2a_{21}a_1^2a_2(a_1 - a_2) - 9a_{30}^2 + 2a_{30}a_1a_2(a_1 - 3a_2)](c - a_1 - a_2) = 0. \end{aligned}$$

Presupunem că $c = a_1 + a_2$, atunci $F_{50} \equiv 0$ şi $F_{41} \equiv 0$. În acest caz sistemul de ecuaţii (3.6) nu are soluţii reale.

Presupunem că $a_1 + a_2 - c \neq 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{50} şi F_{41} în raport cu a_2. Obţinem că $Res(F_{50}, F_{41}, a_2) = f_1f_2j_5$, unde $f_1 = a_1a_{21} + a_{30}$, $f_2 = a_1^2a_{21} + 3a_1a_{30} + 2a_{21}^2$, $j_5 = 27a_{30}^2 + 2a_1a_{30}(2a_1^2 + 9a_{21}) - a_{21}^2(a_1^2 + 4a_{21})$.

Fie $f_1 = 0$, atunci $a_{30} = -a_1a_{21}$ şi $F_{41} \equiv (a_1^2 - a_{21})(a_2^2 - a_{21})a_{21} = 0$. Cazurile $a_{21} = 0$ şi $a_{21} = a_1^2$ se conţin în seturile de condiţii (25) şi (26), respectiv. Să presupunem că $a_{21} = a_2^2$. Exprimăm a din $F_{31} = 0$ şi a_1 din $F_{40} = 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(20) $a = (a_2^3 - a_2 + 2c)/(2a_2),\ d = (a_2^3 + a_2 - c)/a_2,\ f = -1,\ b = a_1 - 2a_2,\ g = (2c - 3a_1a_2^2 - a_1 - 4a_2)/2,\ a_1 = (a_2 - 5a_2^3 + 3ca_2^2 - c)/(2a_2^2)$

pentru existenţa cubicei invariante $x^2 + y^2 - (a_1x - y)(a_2x - y)(a_2x + y) = 0$.

Fie $f_1 \neq 0$ şi $f_2 = 0$. Atunci $a_{30} = -a_{21}(a_1^2 + 2a_{21})/(3a_1)$. Ecuaţia $F_{41} = 0$ are soluţia $a_{21} = -a_1^2/3$. Exprimăm c din $F_{31} = 0$ şi stabilim că acest caz se conţine în (29), pag. 56.

Fie $f_1f_2 \neq 0$ şi $j_5 = 0$. Ecuaţia $j_5 = 0$ admite următoarea parametrizare

$$a_{30} = [(4a_1v + 9)(a_1v + 9)^2]/(108v^3),\ a_{21} = [(5a_1v + 9)(a_1v + 9)]/(12v^2).$$

În acest caz $F_{50} \equiv h_1h_2 = 0$, unde $h_1 = a_1v + 6a_2v + 9$, $h_2 = 4a_1v - 3a_2v + 9$.

Dacă $h_1 = 0$, atunci $F_{31} = 0$ nu are soluţii reale. Dacă $h_1 \neq 0$ şi $h_2 = 0$, atunci $v = 9/(3a_2 - 4a_1)$. Exprimăm c din $F_{31} = 0$. În acest caz $F_{40} \equiv e_1e_2 = 0$, unde

$$e_1 = 3a_1^2 - 2a_1a_2 - a_2^2 + 4,\ e_2 = a_1^2 - 6a_1a_2 + 5a_2^2 - 4.$$

Să presupunem că $e_1 = 0$. Ecuaţia $e_1 = 0$ admite următoarea parametrizare $a_1 = (u^2 - 4)/(4u)$, $a_2 = (-3u^2 - 4)/(4u)$ şi acest caz se conţine în condiţiile (24), pag. 54.

Presupunem că $e_1 \neq 0$ şi fie $e_2 = 0$. Ecuaţia $e_2 = 0$ admite următoarea parametrizare $a_1 = (5u^2 - 4)/(4u)$, $a_2 = (u^2 - 4)/(4u)$. Acest caz se conţine în condiţiile (23), pag. 54.

3.1.2.4. Fie $j_3 = 0$ şi $j_1j_2 \neq 0$. În acest caz avem $a_{30} = a_2(a_2^2 - a_1a_2 - a_{21})$. Exprimăm a din $F_{32} = 0$ şi obţinem $F_{41} \equiv g_1g_2g_3g_4 = 0$, unde $g_1 = a_2^2 - a_{21}$, $g_2 = 2a_1a_2 - 3a_2^2 + a_{21}$, $g_3 = a_1^2 + 2a_1a_2 - 3a_2^2 + 4a_{21}$, $g_4 = (a_1 - a_2)f - 2a_2 + c$.

Presupunem că $g_1 = 0$. Cazul $f = (-3)/2$ se conţine în condiţiile (27), pag. 55. Dacă $2f+3 \neq 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(21) $a = (a_2^2 + 2f + 5)/2,\ b = -(f+2)(3a_2^2+1)/(2a_2),\ c = (fa_2^2 + 3a_2^2 + f + 1)/a_2,$
$d = a_2^2 - 1,\ g = (2f + 3 - 3a_2^4 - 2fa_2^2)/(4a_2),\ a_1 = (a_2^2 - 1)/(2a_2).$

Cubica invariantă este $2a_2(x^2 + y^2) - (a_2^2 x - 2a_2 y - x)(a_2 x + y)(a_2 x - y) = 0$.

Presupunem că $g_1 \neq 0$ şi fie $g_2 = 0$. Atunci $a_{21} = a_2(3a_2 - 2a_1)$ şi $F_{41} \equiv 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii:

(22) $a = (2 - u^2(a_2^2 + 2a_2 u - 3))/[2(u^2+1)],\ f = (-a_2^2 - 2a_2 u - 4u^2 - 3)/[2(u^2+1)],$
$g = (3a_1 a_2^2 - 3a_1 - 6a_2^3 + 2b + 2c)/2,\ d = (3 + 2f - 2a - 6a_1 a_2 + 9a_2^2)/2,\ 2u^2(c + 11b - 4u) + u((2b+c)^2 - 9) + 18b = 0,\ a_1 = 2a_2 + u,\ a_2 = (c - 2u + 2b)/3$

pentru existenţa cubicei invariante $x^2 + y^2 + (ux - y)(a_2 x - y)^2 = 0$.

Presupunem că $g_1 g_2 \neq 0$ şi fie $g_3 = 0$. Atunci $a_{21} = (3a_2^2 - a_1^2 - 2a_1 a_2)/4$ şi $F_{41} \equiv 0$. În acest caz exprimăm c din $F_{31} = 0$ şi obţinem că $F_{40} \equiv s_1 s_2 = 0$, unde

$$s_1 = a_1^2 - 6a_1 a_2 + 5a_2^2 - 4,\ s_2 = (2f+5)a_1^2 - (4f+6)a_1 a_2 + (2f+1)a_2^2 + 8f + 12.$$

Dacă $s_1 = 0$, atunci această ecuaţie admite parametrizarea $a_1 = (5u^2 - 4)/(4u)$, $a_2 = (u^2 - 4)/(4u)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(23) $a = (8fu^2 + (u^2+4)^2)/[4(4-u^2)],\ d = (8f - 8a + 12 - 3a_1^2 - 6a_1 a_2 + 9a_2^2)/8,\ b = ((f+2)(3u^2+4))/(4u),\ c = ((3-f)u^4 + 12fu^2 + 16)/[2u(u^2-4)],\ g = (3a_2(a_1 - a_2)^2 - 12a_1 + 8(b+c))/8,\ a_1 = (5u^2 - 4)/(4u),\ a_2 = (u^2 - 4)/(4u).$

Cubica invariantă este $16u(x^2 + y^2) + (u^2 x - 4x - 4uy)(ux - 2y)^2 = 0$.

Fie $s_1 \neq 0$ şi $s_2 = 0$. În acest caz avem următorul set de condiţii

(24) $b = [((8a + 5u^2 - 12)u^2 + 32(a-1))(a-1)]/u^5,\ c = [(u^2 + 8 - 8a)(u^2+2)]/u^3,$
$d = [(2a-5)u^2 + 16(a-1)]/u^2,\ f = 2(2a - 2 - u^2)/u^2,\ g = [a_2 u(16a_2 + 3u^3 + 20u)]/[8(u^2+4)],\ a_1 = a_2 + u,\ a_2 = [32(1-a) + u^2(12 - 8a - u^2)]/(4u^3).$

Cubica invariantă este $4(x^2 + y^2) + (a_1 x - a_2 x - 2y)^2(a_2 x - y) = 0$.

Presupunem că $g_1 g_2 g_3 \neq 0$ şi fie $g_4 = 0$. Atunci $c = (f+2)a_2 - fa_1$ şi $F_{41} \equiv 0$. În acest caz sistemul de ecuaţii $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0\}$ este compatibil dacă şi numai dacă $(a_1 - a_2)(f+2) = 0$, ceea ce este în contradicţie cu presupunerea (3.7).

3.1.2.5. Fie $j_4 = 0$ şi $j_1 j_2 j_3 \neq 0$. În acest caz avem $a_{30} = -a_1 a_{21}$. Exprimăm a din $F_{32} = 0$ şi obţinem $F_{41} \equiv h_1 h_2 h_3 = 0$, unde $h_1 = a_{21},\ h_2 = a_1^2 - a_{21},\ h_3 = a_1 + a_2 - c$.

Fie $h_1 = 0$. Cazul $f = (-3)/2$ se conţine în (27). Dacă $2f + 3 \neq 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(25) $a = 1,\ b = -[(f+2)(4a_2^2+1)]/(4a_2),\ c = (4a_2^2 + f + 1)/(2a_2),\ d = (2f+1)/2,$
$g = [(2f+3)(1-4a_2^2)]/(8a_2),\ a_1 = (4a_2^2 - 1)/(4a_2).$

Cubica invariantă este $4a_2(x^2+y^2) + (4a_2^2 x - 4a_2 y - x)y^2 = 0$.

Să presupunem că $h_1 \neq 0$ şi fie $h_2 = 0$. Atunci $a_{21} = a_1^2$. Exprimăm c din $F_{31} = 0$ şi obţinem că $F_{40} \equiv i_1 i_2 = 0$, unde $i_1 = 2f + 3,\ i_2 = (5a_1^2 - 4a_1 a_2 + 2)a_1^2 + 4a_2(a_1 - a_2) + 1$.

Fie $i_1 = 0$, atunci $f = (-3)/2$ şi acest caz se conţine în condiţiile (27). Presupunem că $i_1 \neq 0$ şi fie $i_2 = 0$. Ecuaţia $i_2 = 0$ admite următoarea parametrizare $a_1 = (u^2-1)/(2u),\ a_2 = (5u^4 - 2u^2 + 1)/(8u^3)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(26) $a = (4fu^2 - 4f + u^4 + 12u^2 - 5)/(8u^2),\ c = (4fu^4 + 4fu^2 + 15u^4 + 1)/(8u^3),\ b = -[(f+2)(3u^4+1)]/(4u^3),\ d = (2fu^2 + 2f + u^4 - 3u^2 + 4)/(4u^2),\ g = -[(4f + 3u^2 + 3)(u^2-1)^2]/(16u^3),\ a_1 = (u^2-1)/(2u),\ a_2 = (5u^4 - 2u^2 + 1)/(8u^3).$

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 - (a_1 x + y)(a_1 x - y)^2 = 0$.

Să presupunem că $h_1 h_2 \neq 0$ şi fie $h_3 = 0$. În acest caz avem $a_1 = c - a_2,\ f = (-3)/2$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(27) $d = 2a - 3,\ f = (-3)/2,\ g = 2(1-a)(b+c),\ a_1 = 2(b+c)/3,\ a_2 = (c - 2b)/3.$

Cubica invariantă este $3(x^2+y^2) - (2ax^2 - 2x^2 - y^2)(2bx + 2cx - 3y) = 0$.

3.1.2.6. Fie $j_5 = 0$ şi $j_1 j_2 j_3 j_4 \neq 0$. Ecuaţia $j_5 = 0$ admite următoarea parametrizare

$$a_{30} = (4a_1^3 u^3 + 81a_1^2 u^2 + 486 a_1 u + 729)/(108u^3),\ a_{21} = (5a_1^2 u^2 + 54 a_1 u + 81)/(12u^2).$$

Reducem ecuaţiile $F_{50} = 0$ şi $F_{41} = 0$ după parametrul a din $F_{32} = 0$. Atunci avem că $F_{41} \equiv s_1 s_2 = 0$, unde $s_1 = a_1 u + 3,\ s_2 = (7a_1 f + a_1 - 6a_2 + 6c)u + 9f + 9$.

Presupunem că $s_1 = 0$, atunci $a_1 = (-3)/u$. Exprimăm c din $F_{31} = 0$ şi substituim în (3.6). Obţinem că $F_{40} \equiv r_1 r_2 = 0$, unde

$$r_1 = (2f+3)u^2 + 2f + 7,\ r_2 = (4a_2^2 - 1)u^4 + 12a_2 u^3 + 4a_2 u + 6u^2 + 3.$$

Fie $r_1 = 0$, atunci $f = (-3u^2 - 7)/[2(u^2+1)]$ şi găsim următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(28) $a=(2u^4+3u^2-3)/[2u^2(u^2+1)]$, $b=(2a_2u+3)(3-u^2)/[2u(u^2+1)]$, $c=[a_2u(u^2+1)-3u^2-7]/[u(u^2+1)]$, $d=-(u^4+8u^2+3)/[u^2(u^2+1)]$, $f=-(3u^2+7)/[2(u^2+1)]$, $g=(8a_2u^3+u^2-3)/[2u^3(u^2+1))]$, $a_1=(-3)/u$.

Cubica invariantă este $u^3(x^2+y^2)-(x+uy)^3=0$.

Presupunem că $r_1\neq 0$ şi fie $r_2=0$. Ecuaţia $r_2=0$ admite următoarea parametrizare $a_2=(1+6v^2-3v^4)/(8v^3)$, $u=(2v)/(v^2-1)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii:

(29) $a=[4f(1-v^2)(3v^2-1)-(v^2+1)(3v^4+5)]/[8v^2(v^2-3)]$, $b=-(f+2)(3v^4+1)/(4v^3)$, $c=[(4f-17)v^6+(19-40f)v^4+(20f-31)v^2-3]/[8v^3(v^2-3)]$, $d=[2(f+8)-3v^6+10(f+3)v^4-(20f+47)v^2]/[4v^2(v^2-3)]$, $g=[(1-v^2)(3v^6+(4f+7)v^4+(48f+77)v^2+12f+9)]/[16v^3(v^2-3)]$, $a_1=3(1-v^2)/(2v)$, $a_2=(1+6v^2-3v^4)/(8v^3)$.

Cubica invariantă este $8v^3(x^2+y^2)-((v^2-1)x+2vy)^3=0$.

Să presupunem că $s_1\neq 0$ şi fie $s_2=0$. Atunci $a_2=(7a_1fu+a_1u+6cu+9f+9)/(6u)$. Exprimăm c din $F_{31}=0$ şi obţinem $F_{40}\equiv u^2(256f^2+768f+527)a_1^2+18u(64f^2+192f+137)a_1+9[16f(f+3)(u^2+9)+9(4u^2+35)]=0$. Ecuaţia $F_{40}=0$ admite următoarea parametrizare

$a_1=3(3-3h^2+2hu)/[4u(h^2-1)]$, $f=(9-24h^2u-9h^2+14hu-24u)/[16u(h^2+1)]$.

În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante

(30) $b=(f+2)(a_1-2a_2)$, $f=(9-24h^2u-9h^2+14hu-24u)/[16u(h^2+1)]$, $d=[u^2(12-8a+8f+5a_1^2)+54ua_1+81]/(8u^2)$, $a=[4u^2(16h^6-12h^4-7h^3-12h^2+16)+36uh(2h^4-3h^3+3h-2)+81h(h^4-2h^2+1)]/[64u^2(h^2+1)(h^2-1)^2]$, $g=[4u^3(a_1^3-27a_1+18b+18c)+81u^2a_1^2+486ua_1+729]/(72u^3)$, $c=[4u^2(8h^6+34h^5-100h^4+117h^3-100h^2+34h+8)+36u(7-7h^6+18h^5-14h^4+14h^2-18h)+81h(h^4-2h^2+1)]/[64u^2(h^2+1)(h+1)(h-1)^3]$, $a_1=3(3-3h^2+2hu)/[4u(h^2-1)]$, $a_2=(7a_1fu+a_1u+6cu+9f+9)/(6u)$.

Cubica invariantă este $108u^3(x^2+y^2)+(4ua_1x-3uy+9x)(uxa_1+6uy+9x)^2=0$.

3.1.3. Cazul $\mathbf{a_{12}=a_2}$

Cazul $a_{12}=a_2$ este echivalent cu $a_{12}=a_1$, dacă luăm în considerare simetria $F_{ij}(a_1,a_2)=F_{ij}(a_2,a_1)$ în sistemul algebric $\{(3.5),\ (3.6)\}$. Astfel, s-a demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 3.1. *Sistemul cubic* (3.2) *are un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă ce trec prin punctul singular* $(0,1)$ *când* $(a_1-a_2)(f+2)\neq 0$, *dacă şi numai dacă se realizează unul din seturile de condiţii* (1) – (30).

3.2. Centre în sistemele cubice cu un fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă, cazul $f \neq -2$

Fie sistemul cubic (3.2) are un fascicol format din două drepte invariante (3.1) şi o cubică invariantă ireductibilă (3.3), adică se realizează condiţiile Teoremei 3.1. În cele ce urmează, vom determina condiţiile de existenţă a centrului pentru sistemul cubic (2.1) în punctul singular $O(0,0)$. Vom demonstra că orice centru în sistemul cubic (2.1), care are un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, urmează din integrabilitatea Darboux a sistemului.

Lema 3.1. *Următoarele trei seturi de condiţii sunt suficiente încât originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul cubic (2.1):*

(i) $a = 1,\ b = l = s = 0,\ d = f - 1,\ k = g = (ca_1 - 4)/a_1,\ m = (4ca_1 + 3f - 13)/3,\ n = 2r,\ p = (8 - ca_1 + 4f)/a_1,\ q = -2g,\ r = -(f + 1),\ a_1^2 = 3;$

(ii) $a = 1,\ d = -2,\ f = -1,\ k = g,\ l = -b,\ m = (3c^2 - 4b^2 - 4bc - 16)/16,\ n = -m,\ p = b,\ q = -g,\ r = s = 0;$

(iii) $d = 2a - 3,\ f = (-3)/2,\ g = 2(1 - a)(b + c),\ k = (1 - a)(2b + c),\ l = -b,\ m = (9a - 4b^2 - 2bc + 2c^2 - 9)/9,\ n = (18 - 18a + 2b^2 + bc - c^2)/9,\ p = (2b - c)/2,\ q = 2(a - 1)(b + c),\ r = 1/2,\ s = 2(a - 1)(2b - c)(b + c)/9.$

Demonstraţie. În Cazurile (i)–(iii), sistemul (2.1) are integrală primă Darboux de forma

$$l_2^{\alpha}\Phi = C.$$

În Cazul (i): $l_2 = x + a_1(1 - y),\ \Phi = 12(x^2 + y^2)(1 - y) + (c - g)(x^3 + 9xy^2),\ \alpha = -3.$

În Cazul (ii): $l_2 = 4 + (c - 2b)x - 4y,\ \Phi = 12(x^2 + y^2)(1 - y) + 3(2b + 3c)xy^2 + (c - 2b + 8g)x^3,\ \alpha = -3.$

În Cazul (iii): $l_2 = 3(1 - y) + (c - 2b)x,\ \Phi = 3(x^2 + y^2) - (2ax^2 - 2x^2 - y^2)(2bx + 2cx - 3y),\ \alpha = -2.$ □

Lema 3.2. *Următoarele şapte seturi de condiţii sunt suficiente încât originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul cubic (2.1):*

(i) $b = (-1)/5,\ a = -3b,\ c = 18b,\ d = 14b,\ f = 11b,\ g = -2b,\ k = q = 2b,\ l = -b,\ m = n = -9b,\ p = 21b,\ r = -6b,\ s = 0;$

(ii) $b = 1/5,\ a = 3b,\ c = -18b,\ d = -14b,\ f = -11b,\ g = -2b,\ k = q = 2b,\ l = -b,\ m = n = 9b,\ p = 21b,\ r = 6b,\ s = 0;$

(iii) $b = (-1)/5,\ d = 6b,\ f = 9b,\ p = b,\ r = -4b,\ l = n = -b,\ c = 1/10,\ a = 9c,\ g = -c,\ m = -3c,\ q = c,\ k = (-3)/20,\ s = 0;$

(iv) $b = 1/5,\ d = -6b,\ f = -9b,\ l = -b,\ n = p = b,\ r = 4b,\ c = (-1)/10,\ a = -9c,\ g = -c,\ m = 3c,\ q = c,\ k = 3/20,\ s = 0;$

(v) $a = (-2f-1)/2,\ c = -da_1,\ d = -2r,\ g = (na_1)/2,\ k = 2g,\ n = -2f-3,\ l = -b,\ m = n(2a_1^2-3)/2,\ p = -4g,\ q = -g,\ r = -f-1,\ s = 0,\ a_1 = b/(f+2);$

(vi) $a = (1-5f-2f^2)/(2f+7),\ c = (1-2f)a_2,\ d = 2a+4f+3,\ g = c-(a+3)a_2,\ k = 4(a-1)a_2+g,\ l = -b,\ m = [(11f+21)(2f+3)]/(2f+7),\ n = [(2f+3)(f-4)]/(2f+7),\ p = (7f+9)a_2,\ q = 12a_2^3-3ca_2^2-g,\ r = -f-1,\ s = 3(1-a)a_2^2,\ (2f+7)b^2+(2f+3)(f+2)^2 = 0,\ a_2 = b/(f+2);$

(vii) $a = [2-u^2(a_2^2+2a_2u-3)]/[2(u^2+1)],\ f = (-a_2^2-2a_2u-4u^2-3)/[2(u^2+1)],\ g = (3a_1a_2^2-3a_1-6a_2^3+2b+2c)/2,\ d = (3+2f-2a-6a_1a_2+9a_2^2)/2,\ 2u^2(c+11b-4u)+u((2b+c)^2-9)+18b = 0,\ k = (a-1)(a_1+a_2)+g,\ l = -b,\ s = (1-a)a_1a_2,\ m = -a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d+2,\ r = -f-1,\ n = a_1a_2(-f-2)-(d+1),\ p = (f+2)(a_1+a_2)+b-c,\ q = (2b-u)a_1a_2-g,\ a_2 = (c-2u+2b)/3,\ a_1 = (4b+2c-u)/3.$

Demonstraţie. În Cazurile (i)–(vii), sistemul (2.1) are factor integrant Darboux de forma

$$\mu = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3}.$$

În Cazul (i): $l_1 = 1+2x-y,\ l_2 = 1-y,\ \Phi = x^2+y^2-y(x-y)^2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1/2,\ \alpha_3 = (-5)/2.$

În Cazul (ii): $l_1 = 1-2x-y,\ l_2 = 1-y,\ \Phi = x^2+y^2-y(x+y)^2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1/2,\ \alpha_3 = (-5)/2.$

În Cazul (iii): $l_1 = 1-y,\ l_2 = 2+x-2y,\ \Phi = x^2+y^2-y^3,\ \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = (-5)/2.$

În Cazul (iv): $l_1 = 1-y,\ l_2 = 2-x-2y,\ \Phi = x^2+y^2-y^3,\ \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = (-5)/2.$

În Cazul (v): $l_1 = (f+2)(1-y)+bx,\ l_2 = 1-y,\ \Phi = (f+2)(x^2+y^2)+(bx-y(f+2))y^2,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -2.$

În Cazul (vi): $l_1 = 3bx+(f+2)(1-y),\ l_2 = bx+(f+2)(1-y),\ \Phi = (f+2)^3(x^2+y^2)+(bx-(f+2)y)^3,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -2.$

În Cazul (vii): $l_1 = (4b + 2c - u)x + 3(1 - y)$, $l_2 = (c + 2b - 2u)x + 3(1 - y)$, $\Phi = 9(x^2 + y^2) + ((2u - 2b - c)x + 3y)^2(xu - y)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. $\square$

Lema 3.3. *Următoarele şase seturi de condiţii sunt suficiente încât originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul cubic (2.1):*

(i) $a = 3/2$, $b = (7c)/6$, $d = -3$, $f = (-3)/2$, $g = (-11c)/6$, $k = -3p$, $l = -b$, $m = (-41)/6$, $n = 9/2$, $p = c/2$, $q = 7p$, $r = 1/2$, $s = 5/2$, $c^2 - 3 = 0$;

(ii) $a = 5/6$, $c = 6g$, $d = -3$, $f = (-13)/6$, $g = -5b$, $k = g/3$, $m = 19/54$, $l = -b$, $n = 37/18$, $p = (103b)/3$, $q = (25b)/3$, $r = 7/6$, $s = 1/18$, $108b^2 - 1 = 0$;

(iii) $a = 2/(5u^2)$, $b = (8-5u^2)/(20u)$, $c = (169u^2-76)/(10u^3)$, $d = (44-105u^2)/(20u^2)$, $f = (4 - 45u^2)/(20u^2)$, $g = (9u^2 - 4)/(2u^3)$, $k = (20 - 49u^2)/(10u^3)$, $l = -b$, $m = (1215u^2 - 508)/(25u^4)$, $n = (45u^2 - 24)/(10u^2)$, $p = 23(4 - 9u^2)/(10u^3)$, $q = 3(8 - 19u^2)/(5u^3)$, $r = -f - 1$, $s = (5u^2 - 2)/(5u^2)$, $5u^4 - 40u^2 + 16 = 0$;

(iv) $a = 7(11u^2 - 1)/(40u^4)$, $b = (7 - 85u^2)/(200u^5)$, $c = (185u^2 - 19)/(100u^5)$, $d = (5 - 47u^2)/(20u^2)$, $f = (1-75u^2)/(40u^2)$, $g = (1-3u^2)/(40u^5)$, $k = (9-35u^2)/(200u^5)$, $l = -b$, $m = (23-229u^2)/(200u^6)$, $n = (105u^2-11)/(200u^6)$, $p = (37-375u^2)/(200u^5)$, $q = (65u^2 - 11)/(200u^5)$, $r = -f - 1$, $s = (5u^2 + 1)/(200u^6)$, $5u^4 - 10u^2 + 1 = 0$;

(v) $a = (ha_1)/(h^2 - 1)$, $b = (ha_1)/(h - 1)^2$, $c = [h(14h - 11h^2 - 11)a_1]/[(h^2 + 1)(h - 1)^2]$, $f = (h - 2h^2 - 2)/(h^2 + 1)$, $d = [12(39h^3 - 49h^2 + 28h + 7)]/[(h^2 + 1)(h^2 - 1)^2]$, $g = [24h(27h^3 - 35h^2 + 20h + 5)]/[(h^2 + 1)(1 - h^2)^3]$, $k = (a - 1)(a_1 + a_2) + g$, $l = -b$, $s = (1 - a)a_1a_2$, $m = -a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1 + a_2) - a + d + 2$, $r = -f - 1$, $n = a_1a_2(-f - 2) - (d + 1)$, $p = (f + 2)(a_1 + a_2) + b - c$, $q = (a_1 + a_2 - c)a_1a_2 - g$, $a_2 = (-ha_1)/(h - 1)^2$, $a_1 = 2(h^2 - h + 1)/(1 - h^2)$, $h^4 + 4h^3 - 6h^2 + 4h + 1 = 0$;

(vi) $a = 2$, $c = [b(h-2)(1-2h)]/(h^2+1)$, $f = (h-2h^2-2)/(h^2+1)$, $b = (ha_1)/(h-1)^2$, $d = (-6h^3)/[(h^2 + 1)(h^2 - 1)^2]$, $g = [6h(10h^3 + 3h^2 + 6h - 3)]/[(h^2 + 1)(h^2 - 1)^3]$, $k = (a-1)(a_1+a_2)+g$, $l = -b$, $s = (1-a)a_1a_2$, $m = -a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d+2$, $n = a_1a_2(-f-2)-(d+1)$, $r = -f-1$, $p = (f+2)(a_1+a_2)+b-c$, $q = (a_1+a_2-c)a_1a_2-g$, $a_2 = (-ha_1)/(h - 1)^2$, $a_1 = 2(h^2 - h + 1)/(1 - h^2)$, $h^4 - 2h^3 - 2h + 1 = 0$.

Demonstraţie. În fiecare din condiţiile (i)–(vi) sistemul (2.1) este Darboux integrabil, posedă trei drepte invariante şi o cubică invariantă. Sistemul are factor integrant de forma $\mu = l_1^{\alpha_1}l_2^{\alpha_2}l_3^{\alpha_3}\Phi^{\alpha_4}$ în cazurile (i)–(iv) şi integrală primă $l_1^{\alpha_1}l_2^{\alpha_2}l_3^{\alpha_3}\Phi^{\alpha_4} = C$ în cazurile (v), (vi).

În Cazul (i): $l_1 = c + 5x - cy,\ l_2 = 1 - cx - y,\ l_3 = c - 4x - 4cy,\ \Phi = 2c(x^2 + y^2) + (x - c^2x - 2cy)(y - cx)^2,\ \alpha_1 = \alpha_3 = (-3)/2,\ \alpha_2 = (-5)/2,\ \alpha_4 = 1.$

În Cazul (ii): $l_1 = 6b - x - 6by,\ l_2 = 3 - 6bx - 3y,\ l_3 = 27b - 2x - 36by,\ \Phi = 54b(x^2 + y^2)(y - 1) + x(x^2 + 9y^2),\ \alpha_1 = (-3)/2,\ \alpha_2 = \alpha_3 = (-5)/2,\ \alpha_4 = 1.$

În Cazul (iii): $l_1 = 4u + (5u^2 - 4)x - 4uy,\ l_2 = 4u + (u^2 - 4)x - 4uy,\ l_3 = 8u^2 + (7u^2 - 4)(ux - 2y),\ \Phi = 16u(x^2 + y^2) + (u^2x - 4x - 4uy)(ux - 2y)^2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = -3.$

În Cazul (iv): $l_1 = 2u + (u^2 - 1)x - 2uy,\ l_2 = u + x - uy,\ l_3 = 8u^3 + (1 - u^4)x - 2u(1 + u^2)y,$ $\Phi = 8u^3(x^2 + y^2) - (u^2x - x + 2uy)(u^2x - x - 2uy)^2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = -3.$

În Cazul (v): $l_1 = (1 - h^2)(1 - y) + 2(h^2 - h + 1)x,\ l_2 = (h + 1)(h - 1)^3(1 - y) + 2h(h^2 - h + 1)x,\ l_3 = (h^4 - 1)(h - 1)^2 - (h^2 - h + 1)(h^2 - 4h + 1)(h^2x + x + h^2y - y),$ $\Phi = (h^2 - 1)^3(x^2 + y^2) + (2hx - h^2y + y)(h^2x + x + h^2y - y)^2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 2, \alpha_4 = -2.$

În Cazul (vi): $l_1 = (1 - h^2)(1 - y) + 2(h^2 - h + 1)x,\ l_2 = (1 - 2h)(y - 1) + (h^3 - h^2 + h)x,\ l_3 = 6h^3x + (h^2 + 1)(2h - 1)(1 - 3y),\ \Phi = (h^2 - 1)^3(x^2 + y^2) + (2hx - h^2y + y)(h^2x + x + h^2y - y)^2,$ $\alpha_2 = 2,\ \alpha_1 = \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = -2.$ □

În continuare vom determina ciclicitatea focarului slab $O(0, 0)$, adică ce număr minim de mărimi Lyapunov sunt necesare să fie nule, încât punctul singular să fie centru.

Teorema 3.2. *Fie sistemul cubic* (2.1) *are un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă ce trec prin punctul singular* $(0, 1)$ *şi* $(a_1 - a_2)(f + 2) \neq 0$. *Atunci punctul singular* $O(0, 0)$ *este centru dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează.*

Demonstraţie. Fie se realizează condiţiile (2.11) din Lema 2.2 şi calculăm primele trei mărimi Lyapunov L_1, L_2 şi L_3 pentru fiecare set de condiţii (1) – (30), obţinute în Secţiunea 3.1. Vom aplica algoritmul din lucrarea Cozma [31], iar în expresia pentru L_j vom neglija numitorii şi factorii nenuli.

În Cazul (1) găsim $L_1 = 0$ şi avem condiţiile din Lema 3.1, (i).

În Cazul (2) prima mărime Lyapunov este $L_1 = a^2 + f^2 - a + 3f + 2$. Calculăm L_2 şi o reducem după a^2 din $L_1 = 0$. Atunci $L_2 = 0$ are soluţia $a = (8f^2 + 27f + 16)/(4f + 1)$ şi L_1 ia forma $L_1 = (8f^2 + 20f + 11)(5f + 11)(f + 1)$. Dacă $f = -1$, atunci avem Lema 3.1, (ii) $(b = 1,\ c = 2)$. Dacă $f = (-11)/5$, atunci avem Lema 3.2, (i).

Presupunem că $(f + 1)(5f + 11) \neq 0$ şi fie $8f^2 + 20f + 11 = 0$. În acest caz ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Prin urmare originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (3) prima mărime Lyapunov este $L_1 = a^2 + f^2 - a + 3f + 2$. Calculăm L_2 şi o reducem după a^2 din $L_1 = 0$. Atunci $L_2 = 0$ are soluţia $a = (8f^2 + 27f + 16)/(4f + 1)$ şi L_1 i-a forma $L_1 = (8f^2 + 20f + 11)(5f + 11)(f + 1)$. Dacă $f = -1$, atunci avem Lema 3.1, (ii) $(b = -1,\ c = -2)$. Dacă $f = (-11)/5$, atunci avem Lema 3.2, (ii).

Presupunem că $(f + 1)(5f + 11) \neq 0$ şi $8f^2 + 20f + 11 = 0$. În acest caz ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (4) avem $L_1 = a - 1$. Dacă $a = 1$, atunci Lema 3.1, (ii) $(c = 2b)$.

În Cazul (5) din anularea primei mărimi Lyapunov avem $a_1 = 3a_2$. Atunci $F_{32} \equiv 9a_2^4 - 5a_2^2 + 1 = 0$ nu are soluţii reale. În acest caz originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (6) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $f = 2(u^2 - 2u^4 - 3)/(3u^4 - 2u^2 + 3)$. Atunci $L_2 = f_1 f_2$, unde $f_1 = u^2 - 3,\ f_2 = 3u^6 + 5u^4 + 9u^2 - 9$. Dacă $f_1 = 0$, atunci obţinem Lema 3.3, (i). Presupunem că $f_1 \neq 0$ şi fie $f_2 = 0$. Ecuaţia $f_2 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (7) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 9a^2 - 13a + 3f^2 + 9f + 10$. Calculăm L_2 şi o reducem după f^2 din $L_1 = 0$. Atunci $L_2 = 0$ are soluţia $f = (216a^2 - 519a + 185)/[9(12a - 5)]$, iar L_1 ia forma $L_1 = (21a - 10)(9a - 4)(9a - 10)(6a - 5)$.

Dacă $a = 5/6$, atunci avem Lema 3.3, (ii). Fie $6a - 5 \neq 0$. Dacă $a = 10/9$ sau $a = 9/4$ sau $a = 10/21$, atunci $L_1 = L_2 = 0$ şi $L_3 \neq 0$. În aceste trei subcazuri $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (8) avem Lema 3.1, (ii).

În Cazurile (9), (10) şi (11) avem $L_1 \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (12) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 2a^2 - 5a + 2f^2 + 7f + 9$. Reducem L_2 după a^2 din $L_1 = 0$. Atunci $L_2 = 0$ are soluţia $a = (9 - 22f - 16f^2)/[2(16f + 27)]$ şi L_1 obţine forma $L_1 = (32f^2 + 120f + 111)(5f + 9)(2f + 3)$. Dacă $f = (-3)/2$, atunci avem Lema 3.1, (iii) $(a = 1,\ b = -1/2,\ c = 1/2)$. Dacă $f = (-9)/5$, atunci avem Lema 3.2, (iii).

Presupunem că $(2f + 3)(5f + 9) \neq 0$ şi fie $32f^2 + 120f + 111 = 0$. În acest caz ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (13) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 2a^2 - 5a + 2f^2 + 7f + 9$. Reducem L_2 după a^2 din $L_1 = 0$. Atunci $L_2 = 0$ are soluţia $a = (9 - 22f - 16f^2)/[2(16f + 27)]$ şi L_1 obţine forma $L_1 = (32f^2 + 120f + 111)(5f + 9)(2f + 3)$. Dacă $f = (-3)/2$, atunci avem Lema 3.1, (iii) $(a = 1,\ b = 1/2,\ c = -1/2)$. Dacă $f = (-9)/5$, atunci avem Lema 3.2, (iv).

Să presupunem că $(2f + 3)(5f + 9) \neq 0$ şi $32f^2 + 120f + 111 = 0$. În acest caz ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (14) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $f = (-3)/2$, atunci avem Lema 3.1, (iii) $(a = 1,\ c = -b)$.

În Cazul (15) avem $L_1 = 0$, atunci Lema 3.2, (v).

În Cazul (16) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 9a^2 - 21a + 27f^2 + 99f + 100$. Reducem L_2 după a^2 din $L_1 = 0$. Atunci $L_2 = 0$ are soluţia $a = (18f^2 + 84f + 89)/[6(3f + 5)]$ şi L_1 ia forma $L_1 = (72f^3 + 396f^2 + 720f + 433)(2f + 3)$. Dacă $f = (-3)/2$, atunci avem Lema 3.1, (iii) $(c = 0,\ b^2 = 3/4)$. Fie $2f + 3 \neq 0$ şi $72f^3 + 396f^2 + 720f + 433 = 0$. În acest caz ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (17) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $f = (-3)/2$ şi avem Lema 3.1, (iii) $(a = (2b^2 + 9)/9,\ c = 0)$.

În Cazul (18) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $a = -(2f^2 + 5f - 1)/(2f + 7)$, care ne conduce la Lema 3.2, (vi).

În Cazul (19) calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi L_1 în raport cu v. Obţinem că $Res(F_{40}, L_1, v) = (27556u^6 - 14040u^4 - 17496u^2 + 177147)(841u^4 - 4374u^2 + 6561)^2(17u^2 + 54u + 81)^3(17u^2 - 54u + 81)^3(u^2 + 1)^8u^{36} \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (20) prima mărime Lyapunov este $L_1 = c^2(3a_2^4 - 1) + ca_2(2 - 9a_2^4 + 3a_2^2) + a_2^2(6a_2^4 - 7a_2^2 - 1)$. Reducem L_2 după c^2 din $L_1 = 0$. Exprimăm c din $L_2 = 0$ şi L_1 ia forma $L_1 = 245025a_2^{22} + 1239975a_2^{20} - 429264a_2^{18} - 5822568a_2^{16} + 1182522a_2^{14} + 5547390a_2^{12} - 1322072a_2^{10} - 1639888a_2^8 + 405789a_2^6 + 88067a_2^4 - 4688a_2^2 + 784$. Ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. În acest caz originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazurile (21), (24), (25) şi (28) avem $L_1 \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (22) avem Lema 3.2, (vii).

În Cazul (23) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $f = 4(6u^2 - 3u^4 - 8)/(5u^4 - 8u^2 + 16)$, iar $L_2 = e_1e_2$, unde $e_1 = 5u^4 - 40u^2 + 16,\ e_2 = 15u^6 - 12u^4 - 48u^2 - 64$. Dacă $e_1 = 0$, atunci avem Lema 3.3, (iii). Fie $e_1 \neq 0$ şi $e_2 = 0$. Ecuaţia $e_2 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Deci, originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (26) anulând prima mărime Lyapunov obţinem $f = (4u^2 - 17u^4 - 3)/[2(5u^4 - 2u^2 + 1)]$, iar $L_2 = e_1e_2$, unde $e_1 = 5u^4 - 10u^2 + 1,\ e_2 = 15u^6 - 3u^4 - 3u^2 - 1$. Dacă $e_1 = 0$, atunci obţinem Lema 3.3, (iv). Fie $e_1 \neq 0$ şi $e_2 = 0$. Ecuaţia $e_2 = 0$ are soluţii reale şi $L_3 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (27) avem Lema 3.1, (iii).

În Cazul (29) prima mărime Lyapunov este $L_1 = Af^2 + Bf + C$, unde $A = 4(9v^6 - 25v^4 +$

$27v^2-3)(v^2+1)$, $B=4(42v^8-89v^6+33v^4+85v^2-15)$, $C=195v^8-478v^6+284v^4+254v^2-63$.

Fie $A=0$. Ecuaţia $A=0$ are soluţii reale şi $L_1=0$ are soluţia $f=(-C)/B$. În acest caz $L_2\neq 0$. Fie $A\neq 0$. Reducem L_2 după f^2 din $L_1=0$ şi exprimăm f din $L_2=0$. Atunci L_1 obţine forma $L_1=405v^{16}-3456v^{14}+10260v^{12}-15328v^{10}+16054v^8-13248v^6+6340v^4-352v^2+93$. Ecuaţia $L_1=0$ are soluţii reale şi $L_3\neq 0$. În acest caz $O(0,0)$ este focar.

În Cazul (30) anularea mărimii L_1 ne dă $u=[9(h^2-1)]/[2(4h^2-h+4)]$, iar $L_2=e_1e_2$, unde $e_1=h^4+4h^3-6h^2+4h+1$, $e_2=h^4-2h^3-2h+1$. Dacă $e_1=0$, atunci obţinem Lema 3.3, (v), iar dacă $e_2=0$, atunci avem Lema 3.3, (vi). $\square$

Ţinând cont de Teorema 3.2, condiţiile necesare şi suficiente ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul (2.1) sunt rezumate în următoarea teoremă.

Teorema 3.3. *În cazul $f\neq -2$ pentru sistemul cubic (2.1), cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, originea sistemului de coordonate este centru dacă şi numai dacă se realizează condiţiile din Lemele 3.1–3.3.*

3.3. Condiţii de existenţă a unui fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă, cazul $f=-2$

În această secţiune, pentru sistemul cubic (2.1) se determină condiţiile de existenţă a unui fascicol format din două drepte invariante (3.1) şi o cubică invariantă (3.3) ce trec prin punctul singular $(0,1)$, când $f=-2$. Dacă $f=-2$, atunci conform Lemei 2.2 avem că $a\neq 1$, iar sistemul cubic (2.1) are forma

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y+ax^2+cxy-2y^2+[(a-1)(a_1+a_2)+g]x^3+(b-c)xy^2+\\&\quad[d+2-a-a_1^2-(a_1+a_2)(a_2-c)]x^2y+y^3\equiv P(x,y),\\\dot{y}&=-x-gx^2-dxy-by^2+(a-1)a_1a_2x^3+(d+1)xy^2+\\&\quad[g+a_1a_2(c-a_1-a_2)]x^2y+by^3\equiv Q(x,y).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Egalând în (3.4) coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale monoamelor x^iy^j, când $f=-2$, reducem această identitate la un sistem format din cincisprezece ecuaţii $\{F_{ij}=0\}$ în raport cu necunoscutele $a_{30},a_{21},a_{12},c_{20},c_{11},c_{02},c_{10},c_{01}$. Din el aflăm d,g şi coeficienţii cofactorului

$c_{10}=2a-a_{21}$, $c_{01}=a_{12}-2b$, $c_{02}=3b-a_{12}$, $d=(3a_{21}-2a-1)/2$, $g=(3a_{30}-3a_{12}+2b+2c)/2$, $c_{11}=(5a_{21}+2ca_{12}-2a_{12}^2+3-6a)/2$, $c_{20}=[2c(a_{12}^2+2a_{21})-2a_{12}(a_{12}^2+3a_{21})+3a_{30}+a_{12}(2a-11+2(a_1+a_2)^2-2a_1a_2-2c(a_1+a_2))+6(b+c(a_1a_2+1)-a_1a_2(a_1+a_2))]/2$, iar a_{30}, a_{21}, a_{12} sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$
\begin{aligned}
F_{50} \equiv & -ca_{30}(a_{12}^2+2a_{21})+(a_{21}a_1a_2-a_{12}a_{30})(a-1)+\\
& a_{30}(a_{12}^3+3a_{12}a_{21}+3a_{30})+3a_{30}(a_1+a_2)(a_1a_2+a-1)+\\
& a_{12}a_{30}((a_1+a_2)(c-a_1-a_2)+a_1a_2)-3ca_{30}a_1a_2=0,\\
F_{41} \equiv & \, a_{12}^2(a_{12}a_{21}+a_{30}-ca_{21})+a_{21}^2(3a_{12}-2c)+a_{30}(5a_{21}-ca_{12})+\\
& 2a_{21}(a_1+a_2)(a_1a_2-1+a)-2a_1a_2(ca_{21}-a_{12}(a-1))-\\
& (a_{12}a_{21}+3a_{30})(a-1-a_1a_2+(a_1+a_2)(a_1+a_2-c))=0,\\
F_{32} \equiv & \, a_{12}(a_1a_2+a-1)(a_1+a_2)+a_1a_2(3-3a-ca_{12})-\\
& c(a_{12}^3+3a_{12}a_{21}+3a_{30})+a_{12}^4+4a_{12}^2a_{21}+4a_{12}a_{30}+2a_{21}^2-\\
& (a_{12}^2+2a_{21})(a-1-a_1a_2+(a_1+a_2)(a_1+a_2-c))=0,\\
F_{40} \equiv & \, 2a_{12}^2(a_{12}-c)+a_{21}(9a_{12}-a_{30}-2b-6c)-2(b+c)+\\
& a_{12}(5-2a+2c(a_1+a_2)-2(a_1+a_2)^2+2a_1a_2)+\\
& 4(a_1+a_2)(a-1)+6a_1a_2(a_1+a_2-c)+a_{30}(2a+3)=0,\\
F_{31} \equiv & \, 2a(a_{21}+2a_1a_2-1)+(a_{12}-a_{30})(8a_{12}-4b)-a_{21}^2+\\
& 2c(2a_1+2a_2-3a_{12}+3a_{30})-4(a_1+a_2)^2+2a_{21}+3=0,\\
F_{22} \equiv & \, a_{12}^2(a_{12}-c)-a_{12}((a_1+a_2)^2-a_1a_2-c(a_1+a_2))+\\
& b(a_{21}+1)+a_1a_2(a_1+a_2-c)=0.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Notăm $j_1 = a_{12}(a_1+a_2)-3a_1a_2-a_{12}^2-2a_{21}$, $j_2 = a_2^3-a_2^2a_{12}-a_2a_{21}-a_{30}$, $j_3 = a_1^3-a_1^2a_{12}-a_1a_{21}-a_{30}$, $j_4 = 4a_{12}^3a_{30}-a_{12}^2a_{21}^2+18a_{12}a_{21}a_{30}-4a_{21}^3+27a_{30}^2$. Vom studia compatibilitatea sistemului (3.9) când $(a-1)(a_1-a_2) \neq 0$ şi divizăm investigarea în următoarele cinci cazuri: $\{j_1=0\}$, $\{j_2=0,\ j_1\neq 0\}$, $\{j_3=0,\ j_1j_2\neq 0\}$, $\{j_4=0,\ j_1j_2j_3\neq 0\}$, $\{j_1j_2j_3j_4\neq 0\}$.

3.3.1. Cazul $\mathbf{j_1 = 0}$

În acest caz $j_1 = 0$ admite soluţia $a_{21} = (a_1a_{12}-3a_1a_2-a_{12}^2+a_{12}a_2)/2$. Să notăm cu $c_1 = (2a_{12}-6a_2)a_1^2+(2a_{12}-6a_1)a_2^2+11a_1a_2a_{12}+(a_{12}-3a_1-3a_2)a_{12}^2-6a_{30}$ coeficientul lui c din ecuaţia $F_{32}=0$.

3.3.1.1. Fie $c_1 = 0$. Atunci $a_{30} = [(2a_{12}-6a_2)a_1^2+(2a_{12}-6a_1)a_2^2+11a_1a_2a_{12}+(a_{12}-3a_1-3a_2)a_{12}^2]/6$ şi $F_{32} \equiv f_1f_2f_3f_4 = 0$, unde

$$f_1 = 3a_1-a_{12},\ f_2 = 3a_2-a_{12},\ f_3 = a_1+2a_2-a_{12},\ f_4 = 2a_1+a_2-a_{12}.$$

Presupunem că $f_1 = 0$. Atunci $F_{41} \equiv F_{50} \equiv 0$. Dacă $a_1^2 = 1/3$, atunci $F_{40} = 0$ admite soluţia $a_2 = a_1/3$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(1) $a = (13 - 9bc)/13,\ d = 3(3bc - 13)/13,\ g = (13b + c)/13,\ 27c^2 - 169 = 0,\ a_1 = (3c)/13,\ a_2 = c/13$

pentru existenţa cubicei invariante $13(x^2 + y^2)(y - 1) - cx(x^2 + 9y^2) = 0$.

Dacă $a_1^2 \neq 1/3$, atunci exprimăm b şi a din ecuaţiile $F_{22} = 0$ şi $F_{40} = 0$, respectiv. Obţinem că $F_{31} \equiv g_1 g_2 = 0$, unde

$$g_1 = 4a_1 + a_2 - c,\ g_2 = 3a_1^4 - 4a_1^3 a_2 + 6a_1^2 - 12a_1a_2 + 4a_2^2 - 1.$$

Fie $g_1 = 0$, atunci $c = 4a_1 + a_2$. În acest caz părţile drepte ale sistemului (3.8) au factorul comun $a_2x - y + 1$.

Presupunem că $g_1 \neq 0$ şi fie $g_2 = 0$. Ecuaţia $g_2 = 0$ admite următoarea parametrizare $a_1 = (u^2 - 1)/(2u),\ a_2 = (u^4 + 6u^2 - 3)/(8u)$. În acest caz obţinem setul de condiţii:

(2) $a = [u^8 + 10u^6 - 28u^4 + 30u^2 + 3 - 8cu^3(u^2 - 3)]/[8u^2(3u^2 - 1)],\ b = [(u^4 + 22u^2 - 19 - 8cu)(u^2 - 3)(u^2 - 1)]/[16u(1 - 3u^2)],\ d = [u^8 + 37u^6 - 79u^4 + 71u^2 - 6 - 8cu^3(u^2 - 3)]/[8u^2(1-3u^2)],\ g = [(u^8+10u^6+44u^4+6u^2+3)(u^2-1)-8cu^3(u^2+1)^2]/[16u^3(1-3u^2)],\ a_1 = (u^2 - 1)/(2u),\ a_2 = (u^4 + 6u^2 - 3)/(8u)$.

Cubica invariantă este $8u^3(x^2 + y^2) + (u^2x - 2uy - x)^3 = 0$.

Cazul $f_2 = 0$ poate fi redus la $f_1 = 0$ dacă se schimbă cu rolurile a_2 cu a_1.

Presupunem că $f_1 f_2 \neq 0$ şi fie $f_3 = 0$. Atunci $a_{12} = a_1 + 2a_2$ şi $F_{32} \equiv F_{41} \equiv F_{50} \equiv 0$. Să admitem că $a_2(a_1 + a_2) \neq 0$ şi exprimăm c şi a din ecuaţiile $F_{22} = 0$ şi $F_{31} = 0$. În acest caz obţinem următoarele două seturi de condiţii:

(3) $a = (3 - 2a_1a_2 - a_2^2)/2,\ b = 0,\ c = 2a_1 + 3a_2,\ d = 2a - 5,\ g = [a_1(3a_2^2 + 1)]/2$.

Cubica invariantă are forma $x^2 + y^2 + (a_1x - y)(a_2x - y)^2 = 0$.

(4) $a = (-3a_2^4+7a_2^2-4ba_2-2)/(3a_2^2-1),\ d = 1-a-3a_2^2, c = [a(a_2^2-1)+a_2^4+5a_2^2]/(2a_2),\ g = -[a(a_2^2 + 1) - 2a_2^4 + a_2^2 - 1]/(4a_2),\ a_1 = (a_2^2 - 1)/(2a_2)$.

Cubica invariantă are forma $2a_2(x^2 + y^2) + (a_2^2x - 2a_2y - x)(a_2x - y)^2 = 0$.

Presupunem că $a_2(a_1 + a_2) = 0$. Cazul $a_2 = 0$ se conţine în (3). Dacă $a_2 = -a_1$ şi $a_1^2 = 1/3$, atunci obţinem următorul set de condiţii

(5) $b = 0,\ c = [(3a - 8)a_1]/3,\ d = -a,\ g = c + 2a_1,\ a_2 = -a_1,\ a_1^2 = 1/3$

pentru existenţa cubicei invariante $3(x^2 + y^2) + (a_1x + y)(x^2 - 3y^2) = 0$.

Cazul $f_4 = 0$ poate fi redus la $f_3 = 0$ dacă substituim concomitent a_2 cu a_1 şi a_1 cu a_2.

3.3.1.2. Fie $e_1 \neq 0$. În acest caz exprimăm c şi a din ecuaţiile $F_{32} = 0$, $F_{41} = 0$ sistemului (3.9) şi obţinem că $F_{50} \equiv j_2 j_3 j_4 = 0$.

Presupunem că $j_3 = 0$. Atunci $a_{30} = [a_1(2a_1^2 - 3a_1a_{12} + 3a_1a_2 + a_{12}^2 - a_2a_{12})]/2$, iar $F_{40} + F_{22} = 0$ ne dă $h_1h_2 = 0$, unde $h_1 = 4a_1^2 - 5a_1a_{12} + 3a_1a_2 + a_{12}^2 - a_2a_{12} - 2$, $h_2 = 2a_1^3 - 3a_1^2a_{12} + 3a_1^2a_2 + a_1a_{12}^2 - a_1a_2a_{12} + 2a_{12} - 4a_2$.

Dacă $h_1 = 0$, atunci $a_2 = (2 - 4a_1^2 + 5a_1a_{12} - a_{12}^2)/(3a_1 - a_{12})$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii:

(6) $a = a_1(a_1 - a_{12})$, $b = (2a_1^2 - a_1a_{12} - 1)/(3a_1 - a_{12})$, $d = 2(a-1)$, $c = 2(1 - 2a_1^2 + 4a_1a_{12} - a_{12}^2)/(3a_1 - a_{12})$, $g = [a_{12}^2(-3a_1^2 - 1) + 2a_1a_{12}(6a_1^2 + 1) - 9a_1^4 + 5a_1^2 + 2]/(6a_1 - 2a_{12})$, $a_2 = (2 - 4a_1^2 + 5a_1a_{12} - a_{12}^2)/(3a_1 - a_{12})$

pentru existenţa cubicei invariante

$x^2 + y^2 + (a_1^2x^2 - a_1a_{12}x^2 - a_1xy + a_{12}xy - x^2 - y^2)(y - a_1x) = 0.$

Fie $h_1 \neq 0$ şi $h_2 = 0$. Exprimăm a_2 şi b din ecuaţiile $h_2 = 0$ şi $F_{40} = 0$. În acest caz sistemul de ecuaţii (3.9) nu are soluţii reale.

Cazul $j_2 = 0$ poate fi redus la $j_3 = 0$ dacă substituim $a_1 \leftrightarrow a_2$.

Presupunem că $j_2j_3 \neq 0$ şi fie $j_4 = 0$. Ecuaţia $j_4 = 0$ admite parametrizarea $a_{30} = [h^2(4h-27)]/(108v^3)$, $a_{12} = (h-9)/v$, $a_1 = [11h^2 - 144h + 486 - 6va_2(h-9)]/[6v(h - 9 - 3va_2)]$.

Fie $5h^2 - 36h + 12v^2 = 0$. Această ecuaţie are următoarea parametrizare $h = 36/(12u^2 + 5)$, $v = (36u)/(12u^2 + 5)$. În acest caz obţinem

$$F_{22} \equiv (12a_2u^2 + a_2 + 4u)(4a_2u + 12u^2 + 1) = 0.$$

Dacă $a_2 = (-4u)/(12u^2 + 1)$ sau $a_2 = (-12u^2 - 1)/(4u)$, atunci $F_{31} = 0$ implică $b = 0$ şi $F_{40} = 0$ nu are soluţii reale.

Fie $5h^2 - 36h + 12v^2 \neq 0$. În acest caz exprimăm b din ecuaţia $F_{22} = 0$ şi substituim în $F_{40} = 0$ şi $F_{31} = 0$. Rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu a_2 este $Res(F_{40}, F_{31}, a_2) \neq 0$. Sistemul de ecuaţii (3.9) nu are soluţii reale.

3.3.2. Cazul $\mathbf{j_2 = 0}$, $\mathbf{j_1 \neq 0}$

Ecuaţia $j_2 = 0$ are soluţia $a_{30} = a_2(a_2^2 - a_{12}a_2 - a_{21})$. Exprimăm a din $F_{32} = 0$ şi obţinem $F_{41} \equiv f_1f_2f_3f_4 = 0$, unde $f_1 = a_1 + a_{12} - c$, $f_2 = 2a_{12}a_2 - 3a_2^2 + a_{21}$, $f_3 = a_{12}^2 + 2a_{12}a_2 - 3a_2^2 + 4a_{21}$, $f_4 = a_1^2 - (a_1 + a_2)a_{12} + a_1a_2 + a_2^2 - a_{21}$.

3.3.2.1. Fie $f_1 = 0$. În acest caz $a_{12} = c - a_1$ şi $F_{50} \equiv 0$. Obţinem următorul set de condiţii

(7) $a=[a_2(2a_2-2b-c)]/2,\ d=2(a-1),\ g=[6a_2(1-a)-2b+c]/4,\ a_1=(c-2b)/2$

pentru existenţa cubicei invariante

$$2(x^2+y^2)+((2a_2^2-2ba_2-ca_2-2)x^2+(c+2b-2a_2)xy-2y^2)(y-a_2x)=0.$$

3.3.2.2. Fie $f_1\neq 0$ şi $f_2=0$. În acest caz avem $a_{21}=a_2(3a_2-2a_{12})$ şi $F_{50}\equiv 0$. Exprimăm c din $F_{22}=0$, b din $F_{31}=0$ şi a_{12} din $F_{40}=0$. Obţinem următorul set de condiţii

(8) $a=(a_{12}-2a_2)(a_{12}+a_1-a_2-c)+1,\ d=(-2a-6a_{12}a_2+9a_2^2-1)/2,\ g=(3a_{12}a_2^2-3a_{12}-6a_2^3+2b+2c)/2,\ c=[(a_{12}-a_2)(a_1^2+a_1a_2-a_{12}(a_{12}+a_2))+b(2a_2a_{12}-3a_2^2-1)]/[(a_1-a_{12})(a_{12}-a_2)],\ b=[((2a_{12}-6a_2)a_{12}+3a_2^2-2a_1(a_{12}-2a_2)+1)(a_{12}-a_2)]/[4(a_{12}^2-4a_{12}a_2+4a_2^2+1)],\ a_{12}=(4a_1^2+8a_1a_2^3-9a_2^4-6a_2^2-1)/[4(a_1-a_2)(a_2^2+1)]$

pentru existenţa cubicei invariante $4(a_1-a_2)(a_2^2+1)(x^2+y^2)+((4a_1^2-8a_1a_2-a_2^4+2a_2^2-1)x+y(4a_2-4a_1a_2^2-4a_1+4a_2^3))(a_2x-y)^2=0$.

3.3.2.3. Presupunem că $f_1f_2\neq 0$ şi fie $f_3=0$. În acest caz avem $a_{21}=(3a_2^2-a_{12}^2-2a_{12}a_2)/4$ şi $F_{50}\equiv 0$. Dacă $a_1^2+2a_1a_2-3a_2^2-4=0$, atunci obţinem următoarele două seturi de condiţii:

(9) $a=c+4,\ b=0,\ d=-(c+6),\ g=c+3,\ a_1=-2,\ a_2=0.$

Cubica invariantă este $x^2+y^2-y(x+y)^2=0$.

(10) $a=4-c,\ b=0,\ d=c-6,\ g=c-3,\ a_1=2,\ a_2=0.$

Cubica invariantă este $x^2+y^2-y(x-y)^2=0$.

Fie $a_1^2+2a_1a_2-3a_2^2-4\neq 0$ şi exprimăm c din ecuaţia $F_{22}=0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu b. Obţinem că $Res(F_{40},F_{31},b)=2g_1g_2g_3g_4g_5g_6$, unde $g_1=a_{12}^4-12a_2a_{12}^3+2a_{12}^2(8a_1a_2+15a_2^2-4)+4a_{12}(16a_1-8a_1a_2^2-7a_2^3-4a_2)-64a_1^2+16a_1a_2^3+9a_2^4+24a_2^2+16,\ g_2=a_{12}^2-6a_2a_{12}+5a_2^2-4,\ g_3=a_{12}-a_1,\ g_4=a_{12}-a_2,\ g_5=(a_{12}-a_2)^2+4,\ g_6=a_2^2+1$ şi $g_3g_4g_5g_6\neq 0$.

Fie $g_1=0$. Această ecuaţie admite următoarea parametrizare

$$a_{12}=a_2+u,\ a_2=[64a_1(a_1-u)-(u^2-4)^2]/[8(2a_1-u)(u^2+4)].$$

În acest caz $F_{40}\equiv F_{31}=h_1h_2h_3=0$, unde $h_1=(8a_1-4u)^2+(u^2+4)^2\neq 0$,

$$h_2=4a_1u^2+4bu^2+16b-3u^3-4u,\ h_3=16a_1-u^3-12u.$$

Dacă $h_2=0$, atunci $a_1=(3u^3-4bu^2-16b+4u)/(4u^2)$ şi obţinem următorul set de condiţii:

(11) $a = (8b - bu^2 - 2u)/(8b - 2u),\ d = (24b^2 - bu(u^2+18) + 3u^2)/[u(4b-u)], c = [4b^2(u^2+8) - bu(7u^2+16) + u^2(u^2+2)]/[u^2(u-4b)],\ g = [(8b+u^2-2u)(8b-u^2-2u)(3u^2+4)]/[32u^2(u-4b)],\ a_1 = (3u^3 - 4bu^2 - 16b + 4u)/(4u^2),\ a_2 = (u^4 - 64b^2 + 32bu - 4u^2)/[4u^2(4b-u)].$

pentru existenţa cubicei invariante

$$16u^2(u-4b)(x^2+y^2) + (64b^2x + 16bu^2y - 32bux - u^4x - 4u^3y + 4u^2x)(ux-2y)^2 = 0.$$

Dacă $h_2 \neq 0$ şi $h_3 = 0$, atunci $a_1 = (u^3 + 12u)/16$ şi obţinem setul de condiţii:

(12) $a = [32bu + 3(u^2-4)^2]/[8(4-u^2)],\ d = (4 - 4a - 3u^2)/4, c = (128bu + u^6 + 32u^4 - 176u^2 + 128)/[16u(u^2-4)],\ g = (32bu^3 + 128bu + 5u^6 - 20u^4 - 16u^2 + 64)/[32u(u^2-4)],\ a_1 = (u^3 + 12u)/16,\ a_2 = (u^2-4)/(4u).$

Cubica invariantă este $16u(x^2+y^2) + (u^2x - 4x - 4uy)(ux-2y)^2 = 0.$

Presupunem că $g_1 \neq 0$ şi fie $g_2 = 0$. Ecuaţia $g_2 = 0$ admite următoarea parametrizare

$$a_2 = (u^2-4)/(4u),\ a_{12} = (5u^2-4)/(4u).$$

În acest caz $F_{31} \neq 0$ şi sistemul (3.9) nu are soluţii.

3.3.2.4. Fie $f_1f_2f_3 \neq 0$ şi $f_4 = 0$. Ecuaţia $f_4 = 0$ are soluţia $a_{21} = a_1^2 - a_1a_{12} + a_1a_2 - a_{12}a_2 + a_2^2$ şi $F_{50} \equiv 0$. Exprimăm c din $F_{22} = 0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu b. Obţinem că $Res(F_{40}, F_{31}, b) = -2e_1 \cdots e_5$, unde $e_1 = a_1^2 - a_1a_{12} + a_1a_2 + a_{12}a_2 - a_2^2 + 1$, $e_2 = a_1^2 - a_1a_{12} - a_1a_2 + a_{12}a_2 - a_2^2 - 1,\ e_3 = (a_1 + a_2 - a_{12})^2 + 1 \neq 0, e_4 = (a_{12} - a_2)(a_{12} - a_1) \neq 0,\ e_5 = (a_1^2+1)(a_2^2+1) \neq 0.$

Dacă $e_1 = 0$, atunci $a_{12} = (a_1^2 + a_1a_2 - a_2^2 + 1)/(a_1 - a_2)$ şi $F_{31} \neq 0$.

Dacă $e_1 \neq 0$ şi $e_2 = 0$, atunci $a_{12} = (a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 - 1)/(a_1 - a_2)$, iar ecuaţia $F_{31} = 0$ are soluţia $b = (a_1^2 - 2a_1a_2 - 1)/[2(a_1 - a_2)]$. În acest caz obţinem setul de condiţii

(13) $a = [a_1(a_2^2+1)]/(a_1 - a_2),\ b = (a_1^2 - 2a_1a_2 - 1)/[2(a_1 - a_2)],\ c = (a_1^2 - 2a_2^2 - 1)/(a_1 - a_2),\ d = [2a_2(a_1a_2+1)]/(a_1 - a_2),\ g = [a_2(3a_1^2a_2 + 2a_1 + a_2)]/[2(a_2 - a_1)].$

Cubica invariantă este

$$(a_2 - a_1)(x^2+y^2) + ((a_1a_2+1)x + (a_1 - a_2)y)(a_1x - y)(a_2x - y) = 0.$$

3.3.3. Cazul $\mathbf{j_3 = 0}$, $\mathbf{j_1j_2 \neq 0}$

Acest caz poate fi redus la cazul $j_2 = 0$ dacă substituim $a_2 \leftrightarrow a_1$.

3.3.4. Cazul $\mathbf{j_4 = 0}$, $\mathbf{j_1j_2j_3 \neq 0}$

În acest caz ecuaţia $j_4 = 0$ admite parametrizarea

$$a_{12} = (h-9)/v,\ a_{30} = (4h^3 - 27h^2)/(108v^3),\ a_{21} = (5h^2 - 36h)/(12v^2).$$

Exprimăm a din $F_{32} = 0$, atunci $F_{41} \equiv f_1 f_2 j_2 j_3 = 0$, unde

$$f_1 = h - 6,\ f_2 = 6(a_1 + a_2 - c)v + 7h - 54.$$

3.3.4.1. Fie $f_1 = 0$. În acest caz avem $h = 6$, $F_{50} \equiv 0$ şi

$$F_{22} = (a_1 v + a_2 v - cv - 3)(a_1 v + 3)(a_2 v + 3) + bv(v^2 - 3) = 0.$$

3.3.4.1.1. Să admitem că $a_1 = (-3)/v$. Dacă $v^2 = 3$, atunci $F_{31} = 0$ are soluţia $b = 0$ şi obţinem următoarele seturi de condiţii:

(14) $a = (22 + 3\sqrt{3}c)/9,\ b = 0,\ d = -a - 2,\ g = (3c + 4\sqrt{3})/3,\ a_1 = -\sqrt{3},\ a_2 = (-\sqrt{3})/9.$

Cubica invariantă este $3\sqrt{3}(x^2 + y^2) - (x + \sqrt{3}y)^3 = 0$.

(15) $a = (22 - 3\sqrt{3}c)/9,\ b = 0,\ d = -a - 2,\ g = (3c - 4\sqrt{3})/3,\ a_1 = \sqrt{3},\ a_2 = \sqrt{3}/9.$

Cubica invariantă este $3\sqrt{3}(x^2 + y^2) + (x - \sqrt{3}y)^3 = 0$.

Dacă $v^2 \neq 3$ şi $b = 0$, atunci $F_{22} \equiv 0$ şi $F_{31} = 0$ are soluţia $c = (4a_2^2 v^2 - 14a_2 v - v^2 - 19)/[4v(a_2 v + 1)]$. Obţinem următorul set de condiţii

(16) $a = (4a_2 v^3 - 2a_2 v + 3v^2 - 3)/[4v^2(a_2 v + 1)],\ b = 0,\ c = (4a_2^2 v^2 - 14a_2 v - v^2 - 19)/[4v(a_2 v + 1)],\ d = (-6a_2 v^3 - 16a_2 v - 5v^2 - 15)/[4v^2(a_2 v + 1)],\ g = (4a_2^2 v^4 + 4a_2 v^3 - 6a_2 v - v^4 - v^2 - 6)/[4v^3(a_2 v + 1)],\ a_1 = (-3)/v,\ F_{40} \equiv 4a_2^2 v^4 + 12a_2 v^3 + 4a_2 v - v^4 + 6v^2 + 3 = 0$

pentru existenţa cubicei invariante $v^3(x^2 + y^2) - (x + vy)^3 = 0$.

3.3.4.1.2. Să admitem că $a_2 = (-3)/v$. Acest caz poate fi redus la cazul precedent dacă substituim $a_2 \leftrightarrow a_1$. Vom obţine seturile de condiţii (14), (15) şi (16).

3.3.4.1.3. Să admitem că $(a_1 v + 3)(a_2 v + 3) \neq 0$. Reducem ecuaţiile $F_{40} = 0$ şi $F_{31} = 0$ după c din $F_{22} = 0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu b. Obţinem că $Res(F_{40}, F_{31}, b) = -2vg_1 g_2(a_1 v + 3)(a_2 v + 3)$, unde $g_1 = 4a_1^2 v^4 + 12a_1 v^3 + 4a_1 v - v^4 + 6v^2 + 3$ şi $g_2 = 4a_2^2 v^4 + 12a_2 v^3 + 4a_2 v - v^4 + 6v^2 + 3$.

Presupunem că $g_1 = 0$. Această ecuaţie admite următoarea parametrizare $a_1 = (1 + 6u^2 - 3u^4)/(8u^3)$, $v = (2u)/(u^2 - 1)$. În acest caz $F_{31} \equiv h_1 h_2 = 0$, unde $h_1 = 8a_2 u + u^4 + 6u^2 - 3$, $h_2 = 6a_2 u^3 - 2a_2 u + 16bu^3 + 9u^4 - 12u^2 + 3$.

Dacă $h_1 = 0$, atunci $a_2 = (3 - u^4 - 6u^2)/(8u)$ şi obţinem setul de condiţii

(17) $a = (u^8 + 12u^6 - 10u^4 + 12u^2 + 1 + 8c(u^2 - 1)u^3)/(16u^4),\ b = (8cu^3(3u^4 - 10u^2 + 3) + 3u^{10} + 53u^8 - 270u^6 + 270u^4 - 53u^2 - 3)/(128u^5),\ d = -(8cu^3(u^2 - 1) + u^8 + 30u^6 - 38u^4 + 30u^2 + 1)/(16u^4),\ g = (24cu^3(u^4 + 2u^2 + 1) + 3u^{10} + 29u^8 + 90u^6 - 90u^4 - 29u^2 - 3)/(128u^5),\ a_1 = (1 - 3u^4 + 6u^2)/(8u^3),\ a_2 = (3 - u^4 - 6u^2)/(8u).$

Cubica invariantă este $8u^3(x^2+y^2)-(u^2x+2uy-x)^3=0$.

Dacă $h_1 \neq 0$ şi $h_2=0$, atunci $a_2=(12u^2-16bu^3-9u^4-3)/[2u(3u^2-1)]$ şi obţinem următorul set de condiţii

(18) $a=(12u^2-3u^4-1))/(8u^2)$, $b=(8cu^3(1-3u^2)-75u^6+97u^4-21u^2-1)/(64u^5)$, $d=(u^2-3u^4-4)/(4u^2)$, $g=(8cu^3(5u^2+1)-12u^8+105u^6-83u^4-9u^2-1)/(64u^5)$, $a_1=(1-3u^4+6u^2)/(8u^3)$, $a_2=(8cu^3+13u^4-12u^2-1)/(8u^3)$

pentru existenţa cubicei invariante $8u^3(x^2+y^2)-(u^2x+2uy-x)^3=0$.

Presupunem $g_1 \neq 0$ şi fie $g_2=0$. Acest caz poate fi redus la cazul precedent dacă substituim a_2 prin a_1. Obţinem seturile de condiţii (17) şi (18).

3.3.4.2. Fie $f_1 \neq 0$ şi $f_2=0$. În acest caz avem $c=(6va_1+6va_2+7h-54)/(6v)$ şi $F_{41} \equiv F_{50} \equiv 0$. Notăm $a_1a_2=w$ şi $a_1+a_2=z$. Exprimăm w din $F_{22}=0$ şi găsim

$$w=[bv(5h^2-36h+12v^2)+h^2(36+2vz-2h)-18h(vz+9)]/(2hv^2).$$

Rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu z este

$$Res(F_{40},F_{31},z)=-24hv(5h^3-36h^2+12v^2h+288bv^3)(16h^2-216h+9v^2+729)(h^2+36v^2)^2.$$

Ecuaţia $Res(F_{40},F_{31},z)=0$ are soluţia $b=h(36h-5h^2-12v^2)/(288v^3)$ şi sistemul de ecuaţii (3.9) $\{F_{40}=0, F_{31}=0\}$ are soluţii reale numai dacă $z=(4h^3-27h^2+108hv^2-972v^2)/(108v^3)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(19) $a=(4h^2-27h+18v^2)/(18v^2)$, $b=h(36h-5h^2-12v^2)/(288v^3)$, $c=(4h^3-27h^2+234hv^2-1944v^2)/(108v^3)$, $d=(29h^2-216h-108v^2)/(72v^2)$, $g=(65h^3-432h^2+540hv^2-3888v^2)/(864v^3)$, $a_1=[h^2(4h-27)+108v^2(h-9)-108a_2v^3]/(108v^3)$, $1728v^4a_2^2+16v[(27-4h)h^2+108v^2(9-h)]a_2+h^3(72-11h)+hv^2(2592-360h)-432v^4=0$

pentru existenţa cubicei invariante

$$108v^3(x^2+y^2)+(4hx-27x-3vy)(hx+6vy)^2=0.$$

3.3.5. Cazul $\mathbf{j_1j_2j_3j_4 \neq 0}$

Exprimăm a din $F_{32}=0$ şi substituim în ecuaţiile sistemului (3.9). Calculăm rezultanta polinoamelor F_{50} şi F_{41} în raport cu c şi obţinem $Res(F_{50},F_{41},c)=j_1j_2j_3j_4 \neq 0$. În acest caz sistemul de ecuaţii (3.9) nu este compatibil. Astfel, a fost demonstrată teorema

Teorema 3.4. *Fie $(a-1)(a_1-a_2) \neq 0$. Sistemul cubic (3.8) are un fascicol format din două drepte invariante (3.1) şi o cubică invariantă ireductibilă (3.3) ce trec prin punctul singular* (0, 1) *dacă şi numai dacă se realizează unul din seturile de condiţii* (1) – (19).

3.4. Centre în sistemele cubice cu un fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă, cazul $f = -2$

Fie sistemul cubic (3.8) are un fascicol format din două drepte invariante (3.1) şi o cubică invariantă ireductibilă (3.3), adică se realizează condiţiile Teoremei 3.4. În cele ce urmează, vom studia problema centrului pentru sistemul (2.1) în punctul singular $O(0,0)$. Vom demonstra că orice centru în sistemul cubic (2.1), care are un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, urmează din integrabilitatea Darboux a sistemului.

Lema 3.4. *Următoarele patru seturi de condiţii sunt suficiente ca punctul singular $O(0,0)$ să fie centru pentru sistemul (2.1):*

(i) $a = (12u^2 - u^4 - 3)/(8u^2),\ b = (4u^2 - u^4 - 3)/(8u),\ c = (u^4 + 16u^2 - 17)/(8u),\ d = (u^2 - 4u^4 - 3)/(4u^2),\ f = -2,\ g = (3u^6 - 5u^4 + 5u^2 - 3)/(16u^3),\ k = (6u^6 - u^8 + 24u^4 - 38u^2 + 9)/(64u^3),\ l = -b,\ m = (5u^6 + 7u^4 - 65u^2 + 29)/(32u^2),\ n = -d - 1,\ p = b - c,\ r = 1,\ q = (72u^4 - 3u^8 - 22u^6 - 74u^2 + 27)/(64u^3),\ s = (u^{10} + u^8 - 26u^6 + 54u^4 - 39u^2 + 9)/(128u^4)$;

(ii) $c = [2b(7a - 6)]/(3a - 2),\ d = 2(a - 1),\ f = -2,\ g = b(1 - a),\ k = b(a - 1),\ l = -b,\ m = (4 - 5a)/2,\ n = 1 - 2a,\ p = b - c,\ q = [b(7a^2 - 9a + 2)]/(3a - 2),\ r = 1,\ s = (a^2 - a)/2,\ (3a - 2)^2 + 16(a - 1)b^2 = 0$;

(iii) $a = (8b - bu^2 - 2u)/(8b - 2u),\ d = (24b^2 - bu(u^2 + 18) + 3u^2)/(4bu - u^2),\ c = [4b^2(u^2 + 8) - bu(7u^2 + 16) + u^2(u^2 + 2)]/[u^2(u - 4b)],\ f = -2,\ l = -b,\ g = [(8b + u^2 - 2u)(8b - u^2 - 2u)(3u^2 + 4)]/[32u^2(u - 4b)],\ r = 1,\ k = (a - 1)(a_1 + a_2) + g,\ s = (1 - a)a_1a_2,\ q = (a_1 + a_2 - c)a_1a_2 - g,\ m = -a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1 + a_2) - a + d + 2,\ n = -d - 1,\ p = b - c,\ a_1 = (3u^3 - 4bu^2 - 16b + 4u)/(4u^2),\ a_2 = (u^4 - 64b^2 + 32bu - 4u^2)/[4u^2(4b - u)]$;

(iv) $a = (108 - u^2)/72,\ b = (u^3 - 36u)/432,\ l = -b,\ p = b - c,\ r = 1,\ f = -2,\ c = (2592 - u^4 - 252u^2)/(432u),\ d = (-5u^2 - 36)/72,\ n = -d - 1,\ g = (432 - u^4 + 24u^2)/(288u),\ k = (u^6 - 3888u^2 + 93312)/(31104u),\ m = [(u^4 + 81u^2 - 324)(u^2 - 36)]/(1296u^2),\ q = [(u^4 + 168u^2 - 432)(u^2 - 36)]/(20736u),\ s = [(u^2 + 108)(u^2 - 36)^2]/373248.$

Demonstraţie. În fiecare din cazurile (i) – (iv) sistemul cubic (2.1) posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă. Sistemul este Darboux integrabil şi are factor integrant de forma $\mu = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3}$.

În cazul (i): $l_1 = (u^2-1)x + 2u(1-y)$, $l_2 = (u^4+6u^2-3)x + 8u(1-y)$, $\Phi = 8u^3(x^2+y^2) - (u^2x - 2uy - x)^3$, $\alpha_1 = (-1)/2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = (-3)/2$.

În cazul (ii): $l_1 = 2abx + (3a-2)(1-y)$, $l_2 = (3a-2)x + 4b(y-1)$, $\Phi = (2-3a)(x^2 + y^2 + (2a-1)x^2y - y^3) + 2ab(a-1)x^3 + 2b(4-5a)xy^2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = (-1)/2$, $\alpha_3 = (-3)/2$.

În cazul (iii): $l_1 = (3u^3+4u-4b(u^2+4))x + 4u^2(1-y)$, $l_2 = (u^4-(8b-2u)^2)x + 4u^2(4b-u)(1-y)$, $\Phi = 16u^2(u-4b)(x^2+y^2) + (64b^2x + 16bu^2y - 32bux - u^4x - 4u^3y + 4u^2x)(ux-2y)^2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = (-1)/2$, $\alpha_3 = (-3)/2$.

În cazul (iv): $l_1 = (u^2-36)x + 12u(y-1)$, $l_2 = (u^3+108u)x + 432(y-1)$, $\Phi = 432u(x^2+y^2) - (u^2x + 12uy - 36x)(ux+6y)^2$, $\alpha_1 = (-1)/2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = (-3)/2$. $\square$

Lema 3.5. *Următoarele patru seturi de condiţii sunt suficiente ca punctul singular $O(0,0)$ să fie centru pentru sistemul (2.1):*

(i) $a = (3 - 2a_1a_2 - a_2^2)/2$, $b = l = 0$, $c = 2a_1 + 3a_2$, $d = 2a - 5$, $f = -2$, $g = a_1(3a_2^2+1)/2$, $k = (a_2 - 2a_1^2a_2 + 2a_1 - a_2^3)/2$, $m = (2a_1^2 + 6a_1a_2 + 3a_2^2 - 3)/2$, $n = -d-1$, $p = b - c$, $q = a_1(-2a_1a_2 - 7a_2^2 - 1)/2$, $r = 1$, $s = (1-a)a_1a_2$;

(ii) $a = a_1(h - 2a_1)$, $b = (a_1h - a_1^2 - 1)/h$, $c = 2(a_1^2 + 2ha_1 - h^2 + 1)/h$, $d = 2a - 2$, $f = -2$, $g = (6a_1^3h - 3a_1^2h^2 + 2a_1^2 + 4a_1h - h^2 + 2)/(2h)$, $k = (2a_1^3h - 8a_1^4 + 5a_1^2h^2 - 10a_1^2 - 2a_1h^3 + 4a_1h + h^2 - 2)/(2h)$, $r = 1$, $m = (6a_1^3 + a_1^2h - 4a_1h^2 + 6a_1 + h^3 - 2h)/h$, $n = -d-1$, $p = b-c$, $q = (9a_1^2h^2 - 8a_1^4 - 6a_1^3h - 10a_1^2 - 2a_1h^3 + h^2 - 2)/(2h)$, $l = -b$, $a_{12} = 3a_1 - h$, $s = [a_1(4a_1^4 - 3a_1^2h^2 + 6a_1^2 + a_1h^3 - a_1h - h^2 + 2)]/h$;

(iii) $a = [a_2(2a_2 - 2b - c)]/2$, $d = 2(a-1)$, $f = -2$, $g = [6a_2(1-a) - 2b + c]/4$, $k = (2a_2 - 2aa_2 - 4ab + 2ac + 2b - c)/4$, $l = -b$, $m = (c^2 - 4b^2)/4$, $n = 1 - 2a$, $p = b - c$, $q = [6(a-1)a_2 - 4ab + 2ac + 2b - c]/4$, $r = 1$, $s = [a_2(2ab - ac - 2b + c)]/2$;

(iv) $a = [a_1(a_2^2+1)]/(a_1 - a_2)$, $b = (a_1^2 - 2a_1a_2 - 1)/[2(a_1 - a_2)]$, $f = -2$, $c = (a_1^2 - 2a_2^2 - 1)/(a_1 - a_2)$, $d = [2a_2(a_1a_2+1)]/(a_1 - a_2)$, $l = -b$, $g = [a_2(3a_1^2a_2 + 2a_1 + a_2)]/[2(a_2 - a_1)]$, $k = (a-1)(a_1+a_2) + g$, $s = (1-a)a_1a_2$, $m = -a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1+a_2) - a + d + 2$, $r = 1$, $n = -d-1$, $p = b - c$, $q = (a_1 + a_2 - c)a_1a_2 - g$.

Demonstraţie. În fiecare din cazurile (i) – (iv) sistemul cubic (2.1) posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă. Sistemul este Darboux integrabil şi are integrală primă de forma $l_1^{\alpha_1}l_2^{\alpha_2}\Phi^{\alpha_3} = C$.

În cazul (i): $l_1 = 1 + a_1x - y,\ l_2 = 1 + a_2x - y,\ \Phi = x^2 + y^2 + (a_1x - y)(a_2x - y)^2,\ \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 1.$

În cazul (ii): $l_1 = 1 + a_1x - y,\ l_2 = (2a_1^2 + a_1h - h^2 + 2)x - hy + h,\ \Phi = x^2 + y^2 + (a_1^2x^2 + (3a_1 - h)(xy - a_1x^2) - a_1xy - x^2 - y^2)(y - a_1x),\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 1.$

În cazul (iii): $l_1 = (c - 2b)x - 2y + 2,\ l_2 = 1 + a_2x - y,\ \Phi = 2(x^2 + y^2) + ((2a_2^2 - 2ba_2 - ca_2 - 2)x^2 + (c + 2b - 2a_2)xy - 2y^2)(y - a_2x),\ \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1.$

În cazul (iv): $l_1 = 1 + a_1x - y,\ l_2 = 1 + a_2x - y,\ \Phi = (a_2 - a_1)(x^2 + y^2) + ((a_1a_2 + 1)x + (a_1 - a_2)y)(a_1x - y)(a_2x - y),\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 1.$ □

În continuare vom determina ciclicitatea punctului singular $O(0,0)$ de tip focar slab. Se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 3.5. *Fie $f = -2$ şi sistemul cubic (2.1) are un fascicol format din două drepte invariante (3.1) şi o cubică invariantă (3.3). Atunci punctul singular $O(0,0)$ este centru dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează.*

Demonstraţie. Fie se realizează condiţiile (2.11) din Lema 2.2 şi calculăm primele trei mărimi Lyapunov L_1, L_2 şi L_3 pentru fiecare set de condiţii (1) – (19) obţinute în Secţiunea 3.3. Vom aplica algoritmul din lucrarea Cozma [31], iar în expresia pentru L_j vom neglija numitorii şi factorii nenuli.

În Cazul (1) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 117bc + 36c^2 - 338$. Dacă $b = 2(169 - 18c^2)/(117c)$, atunci avem Lema 3.4, (i), $u^2 = 1/3$.

În Cazul (2) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $c = (u^4 + 16u^2 - 17)/(8u)$. Obţinem condiţiile din Lema 3.4, (i).

În Cazul (3) avem Lema 3.5, (i).

În Cazul (4) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 3a_2^2 - 4ba_2 - 1$. Dacă $L_1 = 0$, atunci avem condicţiile din Lema 3.4, (ii).

În Cazul (5) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $a = 2/3$. Avem condiţiile din Lema 3.5, (ii) $(a_1^2 = 1/3,\ h = 4/(3a_1))$.

În Cazul (6) avem Lema 3.5, (ii), iar în Cazul (7) avem Lema 3.5, (iii).

În Cazul (8) prima mărime Lyapunov este $L_1 = (a - 1)(a_1 - a_2)j_1 \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În Cazurile (8), (9) şi (10) obţinem $L_1 = (a - 1)(a_1 - a_2)j_1 \neq 0$, $L_1 = (c + 3)(c + 4) \neq 0$ şi $L_1 = (c - 3)(c - 4) \neq 0$, respectiv. În aceste cazuri punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În Cazul (11) avem condiţiile din Lema 3.4, (iii).

În Cazul (12) prima mărime Lyapunov este $L_1 = (32bu + u^4 - 8u^2 + 16)(16b + u^3 - 4u)(u^2 + 4) \neq 0$. Deci, punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (13) avem Lema 3.5, (iv).

În Cazul (14) anularea primei mărimi Lyapunov ne dă $c = -2\sqrt{3}$. A doua mărime Lyapunov este $L_2 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (15) din anularea primei mărimi Lyapunov obţinem $c = 2\sqrt{3}$. În acest caz $L_2 \neq 0$ şi punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (16) ecuaţia $F_{40} = 0$ admite parametrizarea $v = (z^2 - 1)/(2z),\ a_2 = [(z^2 - 6z + 1)(z + 1)^2 + 4z^2]/[2(z + 1)^3(z - 1)]$, iar prima mărime Lyapunov este $L_1 = (z^2 + 4z + 1)(z^2 + 1)(z - 1)^4 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În Cazul (17) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 1536b^2u^6(u^2+1)^2(u^2-1) - 8bu^3(11u^4 - 18u^2 + 11)(3u^2 - 1)(u^2 + 1)^2(u^2 - 3) + (3u^2 - 1)^2(u^2 + 1)^2(u^2 - 3)^2(u^2 - 1)^3$. Ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale şi $L_2 \neq 0$. Deci, punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În Cazul (18) punctul singular $O(0, 0)$ este focar, aşa cum $L_1 = 8cu^3 + 17u^4 - 16u^2 - 1 \neq 0$.

În Cazul (19) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 36v^2 - h(17h - 108)$. Ecuaţia $L_1 = 0$ admite următoarea parametrizare $v = (108u)/(17u^2 - 36),\ h = (108u^2)/(17u^2 - 36)$. Avem Lema 3.4, (iv). Teorema 3.5 este demonstrată. $\square$

Ţinând cont de Teorema 3.5, condiţiile necesare şi suficiente ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul (2.1) sunt rezumate în următoarea teoremă.

Teorema 3.6. *În cazul $f = -2$ pentru sistemul cubic (2.1), cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, originea sistemului de coordonate este centru dacă şi numai dacă se realizează condiţiile din Lemele 3.4–3.5.*

Următorul exemplu ne arată că pentru existenţa centrului în sistemul cubic cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă cerinţa ca primele trei mărimi Lyapunov să se anuleze este esenţială. Sistemul cubic

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (81y + 36x^2 - 81y^2 + 186x^2y - \sqrt{3}(135xy + 4x^3 - 18xy^2)/81,\\ \dot{y} &= (-27x + 39xy - 5x^3 - 3xy^2 + \sqrt{3}(18x^2 + 9y^2 - 9y^3 - 23xy^2))/27\end{aligned}$$

are un fascicol format din două drepte invariante $1 - \sqrt{3}x - y = 0,\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{9}x - y = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă $9(x^2 + y^2 - y^3) + \sqrt{3}x(x^2 + 9y^2) = 0$, ce trec prin punctul singular

$(0, 1)$, iar în punctul singular $O(0, 0)$ avem că $L_1 = L_2 = 0$ şi $L_3 = (-5447680)/3 \neq 0$, adică acest punct singular este de tip focar.

Dacă nu se realizează condiţiile din Teorema 3.6 şi $L_1 = L_2 = 0$, atunci $L_3 \neq 0$. În acest caz $O(0, 0)$ este focar slab de multiplicitatea maximală trei şi din origine pot fi bifurcate cel mult trei cicluri limită de amplitudine mică.

Teorema 3.7. *Fie sistemul cubic (2.1) posedă un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă (3.3). Atunci $O(0, 0)$ este punct singular de tip centru pentru sistemul (2.1) dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează.*

În rezolvarea problemei centrului un rol determinant l-a jucat metoda integrabilităţii Darboux ceea ce se confirmă de următoarea teoremă.

Teorema 3.8. *Orice sistem cubic ce are puncte singulare de tip centru, un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă (3.3), este Darboux integrabil.*

3.5. Concluzii la capitolul 3

Capitolul 3 este dedicat rezolvării problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă. În el a fost complet rezolvată problema consecutivităţilor centrice pentru sistemele cubice (2.1) cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă. Astfel:

– au fost obţinute 49 seturi de condiţii necesare şi suficiente încât sistemul cubic (2.1) să posede un fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă;

– s-a demonstrat că ciclicitatea punctului singular de tip focar slab în sistemul cubic (2.1) cu un fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă este cel mult trei;

– au fost obţinute 24 seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului în sistemul cubic (2.1) cu un fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă;

– s-a demonstrat că orice centru în sistemul cubic (2.1) cu un fascicol din două drepte invariante şi o cubică invariantă se datorează doar integrabilităţii Darboux.

Rezultatele expuse în acest capitol au fost publicate în lucrările [34], [35], [36], [37], [41], [48], [49], [50].

4. SISTEME CUBICE CU DOUĂ DREPTE INVARIANTE ŞI O CUBICĂ INVARIANTĂ DE POZIŢIE GENERICĂ

În acest capitol pentru sistemul diferenţial cubic (2.1) cu punctul singular $O(0,0)$ de tip centru sau focar sunt obţinute condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a două drepte invariante $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă $\Phi = 0$ de poziţie generică, adică $l_1 \nparallel l_2$ şi $l_1 \cap l_2 \notin \Phi$. Se determină ciclicitatea punctului singular $O(0,0)$ şi se rezolvă problema centrului în cazul a două drepte invariante şi a unei cubice invariante ireductibile de poziţie generică. Se demonstrează că $(1+a_1x-y,\ 1+a_2x-y,\ x^2+y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3;\ N=3)$ este o consecutivitatea centrică.

Fie sistemul cubic (2.1) posedă două drepte invariante l_1 şi l_2, reale sau complexe conjugate ($l_2 = \overline{l_1}$), concurente în punctul singular real (x_0, y_0). Conform Secţiunii 2.1, fără a restrânge generalitatea, putem considera că dreptele au forma

$$l_1 \equiv 1 + a_1x - y = 0,\ l_2 \equiv 1 + a_2x - y = 0,\ a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ a_1 - a_2 \neq 0, \tag{4.1}$$

unde a_1 şi a_2 verifică sistemele de ecuaţii (2.9) şi (2.10):

$$\begin{aligned} &l = -b,\ r = -f - 1,\ s = a_1(g - k + a_1(a-1)),\\ &n = (f+2)a_1^2 + (b - c - p)a_1 - d - 1,\\ &q = -a_1^3 + ca_1^2 + (2 - a + d - m)a_1 - g, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &F_2 \equiv (a-1)(a_1+a_2) + g - k = 0,\\ &F_3 \equiv (f+2)(a_1+a_2) + b - c - p = 0,\\ &F_4 \equiv a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 - c(a_1+a_2) + a - d + m - 2 = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Soluţiile sistemelor (4.2), (4.3) în raport cu a_1 şi a_2 ne determină dreptele invariante l_1 şi l_2 ale sistemului cubic (2.1). În continuare, pentru sistemul cubic (2.1) vom determina condiţiile de existenţă a unei cubice invariante ireductibile de forma

$$\Phi(x,y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0, \tag{4.4}$$

unde $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0$, $a_{03} \neq -1$ şi $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Conform Definiţiei 1.1, cubica (4.4) este o cubică invariantă pentru sistemul (2.1) dacă există aşa un polinom $K(x,y) = c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$, numit cofactorul cubicei invariante, încât în x şi y are loc identitatea

$$P(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} \equiv \Phi(x,y)(c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{10}x + c_{01}y). \tag{4.5}$$

Ţinând cont de relaţiile (4.2) şi egalând în (4.5) coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale monoamelor $x^i y^j$, obţinem trei sisteme de ecuaţii $\{F_{ij} = 0\}$ în raport cu necunoscutele $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02},\ c_{10}, c_{01}$:

$$
\begin{aligned}
&F_{50} \equiv [(a-1)a_1 + g - k]a_1a_{21} + (c_{20} - 3k)a_{30} = 0,\\
&F_{41} \equiv 2[(1-a)a_1 - g + k]a_{12}a_1 + [(a + a_1^2 - 2c - d + m - 2)a_1 -\\
&\quad - c_{20} + g + 2k]a_{21} + (3m - c_{11})a_{30} = 0,\\
&F_{32} \equiv 3[(1-a)a_1 - g + k]a_{03}a_1 + 2(a_1^2 + a - 2c - d + m - 2)a_1a_{12} +\\
&\quad + [(-f-2)a_1 - b + c + p]a_1a_{21} + 2(a - 2c - d + m - 2)a_1a_{12} +\\
&\quad + (2g + k - c_{20})a_{12} + (d + 2m - c_{11} + 1)a_{21} + (3p - c_{02})a_{30} = 0,\\
&F_{23} \equiv 3(a_1^2 + a - 2c - d + m - 2)a_{03}a_1 + 2[(-f-2)a_1 - b + c + +p]a_1a_{12} +\\
&\quad + (3g - c_{20})a_{03} + (2d + m - c_{11} + 2)a_{12} + (b - c_{02} + 2p)a_{21} - 3(f+1)a_{30} = 0,\\
&F_{14} \equiv 3[(-f-2)a_1 - b + c + p]a_1a_{03} + (2b - c_{02} + p)a_{12} - 2(f+1)a_{21} +\\
&\quad + (c_{11} + 3d + 3)a_{03} = 0,\\
&F_{05} \equiv (cb - c_{02})a_{03} - (f+1)a_{12} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{40} \equiv (3a - c_{10})a_{30} - a_{21}g - c_{20} + 2k = 0,\\
&F_{31} \equiv 2[(1-a)a_1 - g + k]a_1 - 2a_{12}g + a_{21}(2a - c_{10} + d +\\
&\quad + (3c - c_{01})a_{30} - c_{11} + 2m = 0,\\
&F_{22} \equiv 2(a_1^2 + a - 2c - d + m - 2)a_1 + (a - c_{10} - 2d)a_{12} - c_{02} -\\
&\quad - (b - 2c + c_{01})a_{21} + 3a_{30}f - 3a_{03}g - c_{20} + 2g + 2p = 0,\\
&F_{13} \equiv 2[(-f-2)a_1 - b + c + p]a_1 + (c - 2b - c_{01})a_{12} - c_{11} -\\
&\quad - (c_{10} + 3d)a_{03} + 2a_{21}f + 2d - 2f = 0,\\
&F_{04} \equiv 2b - c_{02} + a_{12}f - (3b + c_{01})a_{03} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{30} \equiv a_{21} + c_{10} - 2a = 0,\\
&F_{21} \equiv c_{01} + 2g - 2c - 3a_{30} + 2a_{12} = 0,\\
&F_{12} \equiv 2d - 2f + c_{10} - 2a_{21} + 3a_{03} = 0,\\
&F_{03} \equiv 2b + c_{01} - a_{12} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Efectuăm notaţiile:

$$
\begin{aligned}
&e_1 = 27a_{03}^2a_{30}^2 - 18a_{03}a_{12}a_{21}a_{30} + 4a_{03}a_{21}^3 + 4a_{12}^3a_{30} - a_{12}^2a_{21}^2,\\
&e_2 = a_{03}a_1^3 + a_{12}a_1^2 + a_{21}a_1 + a_{30},\\
&e_3 = (fa_1 + a_1 + b - p)a_{03} - (f+1)a_{12},\\
&e_4 = 3a_{03}a_1 + a_{12}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Din sistemul (4.3) uşor găsim că $k = (a-1)(a_1+a_2)+g$, $p = (f+2)(a_1+a_2)+b-c$, $m = 2-a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d$, iar sistemul cubic (2.1) se scrie sub forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y+ax^2+cxy+fy^2+[(a-1)(a_1+a_2)+g]x^3+\\
&\quad +[d+2-a-a_1^2-(a_1+a_2)(a_2-c)]x^2y+\\
&\quad +[(f+2)(a_1+a_2)+b-c]xy^2-(f+1)y^3 \equiv P(x,y),\\
\dot{y} &= -x-gx^2-dxy-by^2+(a-1)a_1a_2x^3+[g+a_1a_2(c-\\
&\quad -a_1-a_2)]x^2y+[(f+2)a_1a_2+d+1]xy^2+by^3 \equiv Q(x,y).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Vom studia compatibilitatea sistemului $\{(4.6), (4.7), (4.8)\}$ cu $a_1-a_2 \neq 0$ şi $a_{03}+1 \neq 0$. Dividem cercetarea în următoarele 6 cazuri: $\{a_{03}=0\}$, $\{a_{03}\neq 0,\ e_1=0\}$, $\{a_{03}e_1\neq 0,\ e_2=0\}$, $\{a_{03}e_1e_2\neq 0,\ e_3=0\}$, $\{a_{03}e_1e_2e_3\neq 0,\ e_4=0\}$, $\{a_{03}e_1e_2e_3e_4\neq 0\}$.

Din sistemul (4.8) aflăm că $c_{10}=2a-a_{21}$, $c_{01}=a_{12}-2b$, $d=(3a_{21}-3a_{03}-2a+2f)/2$, $g=(3a_{30}-3a_{12}+2b+2c)/2$.

4.1. Condiţii de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante de poziţie generică, cazul $a_{03}=0$

Fie sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante ce trec prin punctul singular $(0,1)$, adică sistemul cubic are forma (4.10). Vom găsi condiţiile de existenţă a unei cubice invariante de forma (4.4) cu $a_{03}=0$ şi $a_1-a_2\neq 0$. Din ecuaţiile sistemului (4.8) găsim

$c_{10}=2a-a_{21},\ c_{01}=a_{12}-2b,\ d=(3a_{21}-2a+2f)/2,\ g=(3a_{30}-3a_{12}+2b+2c)/2.$

Soluţiile sistemului $\{(4.6), (4.7)\}$ în raport cu $a_{30}, a_{21}, a_{12}, c_{20}, c_{11}, c_{02}$ ne determină cubicele invariante. Ecuaţia $F_{05}\equiv (f+1)a_{12}=0$ ne implică două subcazuri: $a_{12}=0$ sau $f=-1$.

4.1.1. Fie $a_{12}=0$ şi $a_{21}=0$. Atunci $F_{05}\equiv 0, F_{14}\equiv 0$ şi $f=-1$. Exprimăm c_{02}, c_{11}, c_{20} din ecuaţiile (4.6) şi a_1, a_{30} din ecuaţiile $F_{04}=0$, $F_{22}=0$. Apoi reducem ecuaţia $F_{31}=0$ după a_2^2 din $F_{13}=0$.

Dacă $b^2=3$ şi $a=0$, atunci obţinem următorul set de condiţii:

(1) $a=0,\ d=-1,\ f=-1,\ g=(3c-b)/3,\ b^2=3,\ a_1=(3c-b-3a_2)/3,\ 3a_2^2+(b-3c)a_2-3bc-6=0$

pentru existenţa cubicei invariante $9(x^2+y^2)-8bx^3=0$.

Dacă $b^2=3$ şi $a\neq 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii:

(2) $a = 4/3$, $c = (-7b)/9$, $d = (-7)/3$, $f = -1$, $g = -2c$, $b^2 = 3$, $9a_1 + 9a_2 + 10b = 0$, $9a_2^2 + 10ba_2 + 51 = 0$

pentru existenţa cubicei invariante $9(x^2 + y^2) + 8bx^3 = 0$.

Fie $b^2 \neq 3$ şi exprimăm c din $F_{40} = 0$. Atunci $F_{31} \equiv f_1 f_2 = 0$, unde $f_1 = b^2(2a-3) + 9(a-1)^2$ şi $f_2 = (3b^2 + 7a^2 + 6a - 9)^2 + 32a^2(a-3)^2 \neq 0$. Când $f_1 = 0$ obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(3) $c = b(2a-5)/3$, $d = -a-1$, $f = -1$, $g = [2b(5a^2 - 14a + 9)]/(6a-9)$, $b^2(2a-3) + 9(a-1)^2 = 0$, $a_1 = (2ab - 6b - 3a_2)/3$, $3a_2^2 + (b-3c)a_2 + 12a + b^2 - 3bc - 9 = 0$.

Cubica invariantă este $3(2a-3)(x^2+y^2) + 4b(a^2 - 3a + 2)x^3 = 0$.

4.1.2. Presupunem $a_{12} = 0$ şi fie $a_{21} \neq 0$. Atunci $F_{14} = 0$ are soluţia $f = -1$. Exprimăm c_{02}, c_{11}, c_{20} din ecuaţiile $F_{23} = 0, F_{32} = 0, F_{41} = 0$ şi obţinem $F_{50} \equiv g_1 g_2 g_3 = 0$, unde $g_1 = a_1 a_{21} + a_{30}$, $g_2 = a_2 a_{21} + a_{30}$, $g_3 = (a-1)a_{21} + (a_1 + a_2 - c)a_{30}$.

Dacă $g_1 = 0$, atunci $a_{30} = -a_1 a_{21}$ şi $F_{40} \equiv (a_{21}+1)((2a - 2 - a_{21})a_1 + 2b + 2c) = 0$.

Presupunem că $a_{21} = -1$ şi exprimăm a_1 din $F_{04} = 0$, atunci obţinem $F_{31} \equiv i_1 i_2 = 0$, unde $i_1 = 2a_2 + b - 2c$ şi $i_2 = 4aa_2 - 6a_2 + 3b + 6c$.

Când $i_1 = 0$, avem $b = 0$ şi părţile drepte ale sistemului (4.10) au factorul comun $1 + cx - y$.

Fie $i_1 \neq 0$ şi reducem ecuaţiile $F_{22} = 0$, $F_{13} = 0$ după b din $i_2 = 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{22} şi F_{13} în raport cu a şi stabilim că sistemul de ecuaţii $\{F_{22} = 0,\ F_{13} = 0\}$ este compatibil dacă şi numai dacă $4a_2^2 + 18a + 9 = 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante

(4) $a = (-b^2 - 1)/2$, $c = b(-b^2 - 5)/2$, $d = (b^2 - 4)/2$, $g = 5b(-b^2 - 3)/4$, $f = -1$, $a_1 = b(-b^2 - 3)/2$, $a_2 = (-3b)/2$.

Cubica invariantă este $2(x^2 + y^2) - x^2(b^3 x + 3bx + 2y) = 0$.

Fie $a_{21} + 1 \neq 0$. Atunci ecuaţia $F_{40} = 0$ are soluţia $c = (a_1 a_{21} - 2aa_1 + 2a_1 - 2b)/2$. Exprimăm a din $F_{13} = 0$ şi b din $F_{04} = 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{31} şi F_{22} în raport cu a_2. Obţinem că $Res(F_{31}, F_{22}, a_2) = (a_1^2 + 1)h_1 h_2 h_3$, unde $h_1 = a_1^2 + a_{21} + 1$, $h_2 = 3a_1^4 - 4a_1^2 a_{21} + 14a_1^2 + 27$, $h_3 = 27a_1^2 a_{21}^2 - a_{21}^3 + 15a_{21}^2 - 48a_{21} - 64$.

Dacă $h_1 = 0$, atunci $a_{21} = -a_1^2 - 1$ şi determinăm următorul set de condiţii:

(5) $b = (-2aa_1 - a_1^3 - a_1 - 2a_2)/3$, $c = (4a_2 + 5a_1 - a_1^3 - 2aa_1)/6$, $d = (-2a - 3a_1^2 - 5)/2$, $f = -1$, $g = a_1(2 - a + a_1^2)$, $a = -(4a_2^2 + 9 + 21a_1^2 + a_1(a_1^2+1)(3a_1 + 2a_2))/(2(3a_1^2 + 2a_1 a_2 + 9))$, $F_{31} \equiv a_1^3(23a_1^2 + 5a_1 a_2 + 4a_2^2 + 54) - 18a_1^2 a_2 + 27a_1 - 4a_2^3 - 27a_2 = 0$.

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 + (a_1^2 + 1)(a_1 x - y)x^2 = 0$.

Dacă $h_1 \neq 0$ şi $h_2 = 0$, atunci avem $a_{21} = (3a_1^4 + 14a_1^2 + 27)/(4a_1^2)$ şi obţinem următorul set de condiţii:

(6) $a = (3a_1^4 + 14a_1^2 + 27)/(8a_1^2),\ b = (-a_1^2 - 3)/a_1,\ c = a_1 - b,\ f = -1,\ d = 2a - 1,$ $g = (-9a_1^4 - 34a_1^2 - 81)/(8a_1),\ a_2 = (-3b)/2,\ 5a_1^6 + 31a_1^4 + 63a_1^2 - 27 = 0.$

pentru existenţa cubicei invariante $4a_1^2(x^2 + y^2) - (3a_1^4 + 14a_1^2 + 27)(a_1 x - y)x^2 = 0$.

Presupunem că $h_1 h_2 \neq 0$ şi fie $h_3 = 0$. Notăm $a_{21} = 3h^2 - 1$. Atunci găsim că

$$h_3 \equiv (3a_1 h^2 - a_1 + h^3 - 3h)(3a_1 h^2 - a_1 - h^3 + 3h) = 0.$$

În acest caz obţinem următoarele două seturi de condiţii:

(7) $a = (3h^2 - 1)/2,\ b = -2h,\ c = h(7a - 4)/(3a),\ g = h(13a - 4 - 3a^2)/(3a),\ f = -1,$ $d = 2a - 1,\ a_1 = h(h^2 - 3)/(3h^2 - 1),\ a_2 = 3h.$

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 + (3hx - h^3 x + 3h^2 y - y)x^2 = 0$.

(8) $a = (3h^2 - 1)/2,\ b = 2h,\ c = -h(7a - 4)/(3a),\ g = -h(13a - 4 - 3a^2)/(3a),\ f = -1,$ $d = 2a - 1,\ a_1 = -h(h^2 - 3)/(3h^2 - 1),\ a_2 = -3h.$

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 + (h^3 x - 3hx + 3h^2 y - y)x^2 = 0$.

Cazul $g_2 = 0$ este simetric cu cazul $g_1 = 0$, se obţin seturile de condiţii (4) – (8).

Presupunem că $g_1 g_2 \neq 0$ şi fie $g_3 = 0$. Atunci avem $a = (a_{21} + ca_{30} - a_2 a_{30} - a_1 a_{30})/a_{21}$. Exprimăm a_1 din $F_{04} = 0$ şi reducem ecuaţiile din (4.7) după a_2^2 din $F_{13} = 0$. Considerăm ecuaţia $F_{40} - F_{22} = 0$ şi presupunem că $ba_{30} - 3a_{21}^2 + b^2 a_{21} = 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(9) $a = (b^2 + 4)/4,\ c = (-3b)/2,\ d = (b^2 - 4)/2,\ f = -1,\ g = b(3b^2 - 4)/8,\ a_1 = -a_2 - 2b,$ $4a_2^2 + 8ba_2 + 5b^2 + 4 = 0.$

Cubica invariantă este $4(x^2 + y^2) + b^2 x^2(bx + 2y) = 0$.

Presupunem că $ba_{30} - 3a_{21}^2 + b^2 a_{21} \neq 0$ şi exprimăm c din ecuaţia $F_{40} - F_{22} = 0$. Dacă $a_{30} = 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii:

(10) $a = 1,\ b = 2c,\ d = 10,\ f = -1,\ g = 3c,\ a_1 = 3\sqrt{3},\ a_2 = -3\sqrt{3}.$

pentru existenţa cubicei invariante $x^2 + y^2 + 8x^2 y = 0$.

Fie $a_{30} \neq 0$ şi exprimăm a_{30} din $F_{31} = 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(11) $a=(2a_{21}+ba_{30})/(2a_{21})$, $c=[-b(a_{21}^2+a_{21}(b^2-32)+4b^2)]/[2(3a_{21}^2-b^2a_{21}-4b^2)]$, $f=-1$, $d=(3a_{21}-2a-2)/2$, $g=(3a_{30}+2b+2c)/2$, $a_{30}=[(3a_{21}-b^2)(a_{21}-8)a_{21}^2]/[b(3a_{21}^2-b^2a_{21}-4b^2)]$, $a_1=(2c-b-2a_2)/2$, $a_{21}(2a_2^2+(b-2c)a_2+b^2-2bc+2)-7a_{21}^2+4ba_{30}=0$, $F_{40}\equiv 81a_{21}^4-30b^2a_{21}^3+b^2(b^2+24)a_{21}^2+8b^4a_{21}+16b^4=0$.

Cubica invariantă este $x^2+y^2+x^2(a_{30}x+a_{21}y)=0$.

4.1.3. Presupunem că $a_{12}\neq 0$ şi fie $f=-1$. Exprimăm c_{02}, c_{11}, c_{20} din ecuaţiile $F_{14}=0, F_{23}=0, F_{32}=0$ a sistemului (4.6). Calculăm rezultanta polinoamelor F_{41} şi F_{50} în raport cu a. Obţinem că $Res(F_{41},F_{50},a)=j_1j_2j_3j_4$, unde $j_1=4a_{12}a_{30}-a_{21}^2$, $j_2=a_1+a_2-c$, $j_3=a_1^2a_{12}+a_1a_{21}+a_{30}$, $j_4=a_2^2a_{12}+a_2a_{21}+a_{30}$.

4.1.3.1. Presupunem că $j_1=0$. Atunci $a_{30}=a_{21}^2/(4a_{12})$ şi $F_{41}\equiv h_1h_2h_3=0$, unde $h_1=2a_1a_{12}+a_{21}$, $h_2=2a_2a_{12}+a_{21}$, $h_3=2(a-1)a_{12}+(a_1+a_2-c)a_{21}$.

Fie $a_1=-a_{21}/(2a_{12})$, atunci avem $h_1\equiv 0$ şi $F_{50}\equiv 0$. Exprimăm b din $F_{04}=0$ şi reducem ecuaţiile $F_{31}=0$, $F_{22}=0$ după a_2^2 din $F_{13}=0$. Presupunem că $a_{21}+1\neq 0$ şi exprimăm c din $F_{40}=0$. Atunci obţinem $F_{22}-F_{31}\equiv(a_{21}-2a)(a_{12}^2-2a_{21}-4)=0$.

Dacă $a_{21}=2a$ şi $a=4$, atunci determinăm următoarele două seturi de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(12) $a=4$, $b=7-g$, $c=2g-7$, $d=7$, $f=-1$, $g^2-14g+46=0$, $a_1=-1$, $a_2=3g-17$.

Cubica invariantă este $x^2+y^2+4x(x+y)^2=0$.

(13) $a=4$, $b=-7-g$, $c=2g+7$, $d=7$, $f=-1$, $g^2+14g+46=0$, $a_1=1$, $a_2=3g+17$.

Cubica invariantă este $x^2+y^2-4x(x-y)^2=0$.

Dacă $a_{21}=2a$ şi $a\neq 4$, atunci obţinem următorul set de condiţii:

(14) $b=[3(a^2-a_{12}^2)]/[2a_{12}(a-4)]$, $c=(4a^2-2aa_{12}^2-4a+5a_{12}^2)/[a_{12}(4-a)]$, $d=2a-1$, $g=(a_{12}^2-3a^3+17a^2-aa_{12}^2-8a)/[2a_{12}(4-a)]$, $a_1=(-a)/a_{12}$, $a_2=(a_{12}^2-9a^2+2aa_{12}^2)/[2a_{12}(a-4)]$, $F_{13}\equiv 27a_{12}^4-2a_{12}^2(4a^3-3a^2+48a+32)+27a^4=0$

pentru existenţa cubicei invariante $a_{12}(x^2+y^2)+x(ax+a_{12}y)^2=0$.

Presupunem că $a_{21}\neq 2a$ şi fie $a_{21}=(a_{12}^2-4)/2$. Dacă $5a_{12}^2-108=0$, atunci avem $F_{22}\equiv(15a-64)(5a_{12}a_2-234)=0$ şi obţinem următoarele două seturi de condiţii:

(15) $a=64/15$, $b=(504-25a_{12}a_2)/(75a_{12})$, $c=2(25a_{12}a_2+897)/(75a_{12})$, $f=-1$, $d=119/15$, $g=(25a_{12}a_2+2046)/(75a_{12})$, $5a_{12}^2-108=0$, $a_1=(-22)/(5a_{12})$, $75a_2^2-145a_{12}a_2-819=0$.

Cubica invariantă este $16a_{12}(x^2+y^2)+x(a_{12}^2x-4x+4a_{12}y)^2=0$.

(16) $b=6(15a-101)/(25a_{12})$, $c=2(45a+497)/(25a_{12})$, $d=(61-5a)/5$, $f=-1$, $g=4(45a+76)/(25a_{12})$, $5a_{12}^2-108=0$, $a_1=(-22)/(5a_{12})$, $a_2=234/(5a_{12})$.

Cubica invariantă este $16a_{12}(x^2+y^2)+x(a_{12}^2x-4x+4a_{12}y)^2=0$.

Dacă $5a_{12}^2-108\neq 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii:

(17) $b=(4ca_{12}-4a_2a_{12}-3a_{12}^2-4)/(4a_{12})$, $d=(3a_{12}^2-4a-16)/4$, $g=(3a_{12}^4-96a_{12}^2-32a_{12}a_2+64ca_{12}+16)/(32a_{12})$, $n=(4aa_{12}+a_{12}^2a_2-4a_2-3a_{12}^3+12a_{12})/(4a_{12})$, $c=[a_{12}^2(16a^2+104a-a_{12}^4-10a_{12}^2-64)+96a-160]/[16a_{12}(6a-4-a_{12}^2)]$, $a_2=[4aa_{12}^2(5a_{12}^2-4)-(5a_{12}^2-12)(a_{12}^2+4)(a_{12}^2-6)]/[32a_{12}(6a-4-a_{12}^2)]$, $F_{13}\equiv 3a_{12}^8-4a_{12}^6(8a+1)+4a_{12}^4(28a^2+8a-13)+32a_{12}^2(1-4a^3-2a^2+4a)-64=0$.

pentru existenţa cubicei invariante $16a_{12}(x^2+y^2)+x(a_{12}^2x-4x+4a_{12}y)^2=0$.

Fie $a_{21}=-1$. În acest caz $F_{40}\equiv(a-1)(4a_{12}a_2-1)=0$. Dacă $a=1$, atunci sistemul (4.7) nu este compatibil. Presupunem că $a\neq 1$ şi fie $a_2=1/(4a_{12})$. Cazul $a=(-1)/2$ se conţine în (14). Dacă $a\neq(-1)/2$ şi $a_{12}^2=2$, atunci obţinem următorul set de condiţii:

(18) $a=(-3)/4$, $b=1/(2a_{12})$, $c=13/(4a_{12})$, $d=(-7)/4$, $f=-1$, $g=9/(8a_{12})$, $a_{12}^2=2$, $a_1=1/(2a_{12})$, $a_2=1/(4a_{12})$.

Cubica invariantă este $4a_{12}(x^2+y^2)+x(x^2-4a_{12}xy+8y^2)=0$.

Cazul $h_2=0$ este simetric cu $h_1=0$, dacă ţinem cont de substituţia $a_2\leftrightarrow a_1$.

Presupunem că $h_1h_2\neq 0$ şi fie $h_3=0$. Exprimăm a_1 din $F_{04}=0$ şi reducem ecuaţiile sistemului (4.7) după a_2^2 din $F_{13}=0$. Atunci $h_3=0$ are soluţia $a=(a_{12}a_{21}+2a_{12}+ba_{21}]/(2a_{12})$. Efectuăm notaţiile $\Delta_1=a_{12}a_{21}-2a_{12}-3ba_{21}$ şi $\Delta_2=4a_{12}^2(a_{21}+16)-3a_{21}^3$.

Fie $\Delta_1\neq 0$ şi exprimăm c din $F_{22}=0$. Dacă $a_{21}(a_{21}+4)=0$, atunci sistemul (4.7) nu este compatibil. Dacă $a_{21}=8$, atunci avem $a_{12}=\pm 4$ şi obţinem următoarele două seturi de condiţii:

(19) $a=b+5$, $c=b+12$, $d=6-b$, $f=-1$, $g=2(b+6)$, $a_1=8-a_2$, $a_2^2-8a_2=11$.

Cubica invariantă este $x^2+y^2+4x(x+y)^2=0$.

(20) $a=5-b$, $c=b-12$, $d=6+b$, $f=-1$, $g=2(b-6)$, $a_1=-a_2-8$, $a_2^2+8a_2=11$.

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 - 4x(x-y)^2 = 0$.

Presupunem că $a_{21}(a_{21}+4)(a_{21}-8)\Delta_1 \neq 0$ şi fie $\Delta_2 = 0$. Atunci sistemul (4.6) nu este compatibil.

Presupunem că $a_{21}(a_{21}+4)(a_{21}-8)\Delta_1\Delta_2 \neq 0$ şi reducem ecuaţiile $\{F_{40}=0,\, F_{31}=0\}$ după b^2 din $H \equiv a_{21}F_{40} + a_{12}F_{31} = 0$. Atunci $F_{31} \equiv e_1e_2 = 0$, unde

$$e_1 = 44a_{12}^2a_{21} - 64a_{12}^2 + 16ba_{12}a_{21}^2 - 128ba_{12}a_{21} - 9a_{21}^3,$$
$$e_2 = 432a_{12}^4 - 16a_{12}^2a_{21}^3 + 24a_{12}^2a_{21}^2 - 768a_{12}^2a_{21} - 1024a_{12}^2 + 27a_{21}^4.$$

Dacă $e_1 = 0$, exprimăm b şi obţinem că $F_{31} \equiv F_{40} \equiv 0$ şi $H \equiv \Delta_1\Delta_2^2 \neq 0$.

Dacă $e_1 \neq 0$ şi $e_2 = 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii:

(21) $a = (a_{12}a_{21} + 2a_{12} + ba_{21})/(2a_{12})$, $c = [4a_{12}^2(2a_{21}-7) + 12ba_{12}(2-3a_{21}) + 9a_{21}^2 - 12b^2a_{21}]/[4(a_{12}a_{21} - 2a_{12} - 3ba_{21})]$, $d = (2a_{12}a_{21} - 4a_{12} - ba_{21})/(2a_{12})$, $f = -1$, $g = (3a_{21}^2 - 12a_{12}^2 + 8ba_{12} + 8ca_{12})/(8a_{12})$, $a_1 = c - b - a_{12} - a_2$, $2a_{12}a_2^2 + 2a_{12}a_2(a_{12} + b - c) + 4ba_{12}^2 + a_{12}(2b^2 - 2bc + 2) + a_{21}(4b - 3a_{12}) = 0$, $H \equiv b^2(4a_{12}^2a_{21} + 64a_{12}^2 - 3a_{21}^3) + ba_{12}(4a_{12}^2a_{21} - 32a_{12}^2 + a_{21}^3 - 8a_{21}^2) + a_{12}^2(12a_{12}^2 - a_{21}^2 - 16a_{21}) = 0$, $e_2 \equiv 432a_{12}^4 - 16a_{12}^2a_{21}^3 + 24a_{12}^2a_{21}^2 - 768a_{12}^2a_{21} - 1024a_{12}^2 + 27a_{21}^4 = 0$.

Cubica invariantă este $4a_{12}(x^2+y^2) + x(a_{21}x + 2a_{12}y)^2 = 0$.

Fie $\Delta_1 = 0$. Atunci avem $b = [a_{12}(a_{21}-2)]/(3a_{21})$ şi sistemul de ecuaţii $\{F_{22}=0, F_{31}=0\}$ este compatibil dacă şi numai dacă $a_{12} = \pm 4$, $a_{21} = 8$. În acest caz obţinem seturile de condiţii (19) $(b=1)$ şi (20) $(b=-1)$.

4.1.3.2. Presupunem că $j_1 \neq 0$ şi fie $j_2 = 0$. Atuncu avem $c = a_1 + a_2$ şi $F_{41} \equiv i_1i_2 = 0$, unde $i_1 = a - 1$, $i_2 = 2a_1a_2a_{12}^2 + (a_1+a_2)a_{12}a_{21} - 2a_{12}a_{30} + a_{21}^2$.

Fie $i_1 = 0$. Atunci $F_{50} \equiv 0, F_{41} \equiv 0$ şi $F_{04} = 0$ are soluţia $a_{12} = -b$. Obţinem că

$$F_{40} \equiv (2a_1 + 2a_2 + a_{30} + 5b)(a_{21}+1) = 0.$$

Presupunem că $a_{21} = -1$. Atunci $F_{22} = 0$ implică $a_{30} = -(2a_1 + 2a_2 + 7b)/3$ şi $F_{31} \equiv (2a_1 + a_2 + 3b)(a_1 + 2a_2 + 3b) = 0$. În acest caz sistemul (4.7) nu este compatibil.

Presupunem că $a_{21} \neq -1$. Atunci $F_{40} = 0$ are soluţia $a_{30} = -2a_1 - 2a_2 - 5b$ şi $F_{22} \equiv (a_1 + a_2 + 2b)(a_{21}+4) = 0$. Dacă $a_{21} = -4$, atunci sistemul (4.7) nu este compatibil.

Dacă $a_{21} \neq -4$ şi $a_1 = -a_2 - 2b$, atunci $F_{13} = 0$ implică $a_{21} = [2(a_2+b)^2 + 2]/7$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(22) $a = 1$, $c = -2b$, $d = 10$, $f = -1$, $g = -b$, $a_1 = -a_2 - 2b$, $a_2^2 + 2ba_2 + b^2 - 27 = 0$.

Cubica invariantă este $x^2 + y^2 - x(bx^2 - 8xy + by^2) = 0$.

Fie $i_1 \neq 0$ şi $i_2 = 0$. Atunci $a_{30} = (2a_1a_2a_{12}^2 + (a_1 + a_2)a_{12}a_{21} + a_{21}^2)/(2a_{12})$. Din ecuaţiile $F_{50} = 0$, $F_{04} = 0$ găsim $a_{21} = b(a_1 + a_2)$, $a_{12} = -b$. Exprimăm a din $F_{13} = 0$ şi reducem ecuaţiile $F_{40} = 0$ şi $F_{31} = 0$ după b^3 din $F_{22} = 0$. Considerăm ecuaţia $G \equiv F_{40} + a_2F_{31} = 0$ care are forma

$$G \equiv -2(b(a_1 - a_2) + a_2^2 + 1)(2a_1 + 5b)(a_2^2 + 1) = 0.$$

Dacă $a_1 = (-5b)/2$, atunci avem $a_2 = (-46)/(11b)$ şi $b^2 = 4/11$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa cubicei invariante:

(23) $a = (-61)/11$, $c = -14b$, $d = (-34)/11$, $f = -1$, $g = (-299b)/11$, $b^2 = 4/11$, $a_1 = (-5b)/2$, $a_2 = (-23b)/2$.

Cubica invariantă este $2(x^2 + y^2) - x(6b^2x + 2x + by)(5bx + 2y) = 0$.

Dacă $a_1 \neq (-5b)/2$, atunci ecuaţia $G = 0$ are soluţia $a_1 = (ba_2 - a_2^2 - 1)/b$, iar $F_{40} = 0$ are soluţia $a_2 = (-5b)/2$. În acest caz $b^2 = 4/11$ şi obţinem la fel setul de condiţii (23).

4.1.3.3. Presupunem că $j_1j_2 \neq 0$ şi fie $j_3 = 0$. Atunci avem $a_{30} = -a_1(a_1a_{12} + a_{21})$ şi $F_{41} \equiv r_1r_2 = 0$, unde $r_1 = a_{12}(a_1 + a_2) + a_{21}$, $r_2 = (a - 1)a_{12} + (a_1 + a_2 - c)(a_1a_{12} + a_{21})$.

Considerăm $r_1 = 0$. Atunci $a_{21} = -(a_1 + a_2)a_{12}$. Exprimăm a_1 din $F_{04} = 0$ şi reducem ecuaţiile $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0, F_{22} = 0\}$ după a_2^2 din $F_{13} = 0$.

Notăm $\Delta_3 = a_{12} - 3b + c$. Dacă $\Delta_3 = 0$ sistemul (4.7) nu este compatibil. Fie $\Delta_3 \neq 0$ şi exprimăm a din $F_{22} = 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu c. Obţinem că $Res(F_{40}, F_{31}, c) = 1048576ba_{12}s_1s_2\cdots s_9$, unde $s_1 = a_{12} - 2b$, $s_2 = a_{12} - b$, $s_3 = 3a_{12}^2 - 8ba_{12} - 4$, $s_4 = a_{12}^2 + (3a_{12} - 4b)^2 + 8$, $s_5 = (a_{12} - 4b)^2 + 4$, $s_6 = 9a_{12}^2 + 4$, $s_7 = 5a_{12}^2 + 4$, $s_8 = a_{12}^2 + 4$, $s_9 = b^2 + 1$ şi $a_{12}s_4s_5\cdots s_9 \neq 0$.

Fie $b = 0$. Atunci ecuaţiile $F_{40} = 0$ şi $F_{31} = 0$ au factorul comun $a_{12} - c$. Dacă $a_{12} = c$, atunci cubica invariantă (4.4) este reductibilă. Dacă $a_{12} \neq c$ şi $a_{12}^2 = 4/3$, atunci $c^2 - 12 = 0$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa cubicei invariante:

(24) $a = (-7)/3$, $b = 0$, $d = (-8)/3$, $f = -1$, $g = c$, $c^2 - 12 = 0$, $a_1 = (2c - 3a_2)/3$, $3a_2^2 - 2ca_2 + 3 = 0$.

Cubica invariantă este $3(x^2 + y^2) + x(cx^2 - 8xy + cy^2) = 0$.

Fie $s_1 = 0$ şi $b \neq 0$. Atunci obţinem $a_{12} = 2b$ şi $c = (3b^2 + 1)/(2b)$. În acest caz părţile drepte ale sistemului (4.10) au factor comun.

Fie $s_2 = 0$ şi $bs_1 \neq 0$. Atunci avem $a_{12} = b$, $c = 0$ şi obţinem următorul set de condiţii:

(25) $a = b^2+1$, $c=0$, $d=2(b^2-1)$, $f=-1$, $g=b(3b^2+1)$, $a_{1,2}=-b\pm i\sqrt{b^2+1}$

pentru existenţa cubicei invariante $x^2+y^2+(2b^3+b)x^3+2b^2x^2y+bxy^2=0$.

Fie $s_3=0$ şi $bs_1s_2\neq 0$. Atunci avem $b=(3a_{12}^2-4)/(8a_{12})$ şi $c=(15a_{12}^4+32a_{12}^2+16)/(16a_{12}^3)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii:

(26) $a=(7a_{12}^4-48a_{12}^2-48)/(32a_{12}^2)$, $b=(3a_{12}^2-4)/(8a_{12})$, $c=(15a_{12}^4+32a_{12}^2+16)/(16a_{12}^3)$, $d=(7a_{12}^2-52)/16$, $f=-1$, $g=(9a_{12}^6-132a_{12}^4+432a_{12}^2+320)/(128a_{12}^3)$, $a_1=(4-a_{12}^2)/(4a_{12})$, $a_2=(16-3a_{12}^4+24a_{12}^2)/(16a_{12}^3)$.

Cubica invariantă este

$$64a_{12}^3(x^2+y^2)+x(3a_{12}^4x-24a_{12}^2x-16x+16a_{12}^3y)(a_{12}^2x-4x+4a_{12}y)=0.$$

Presupunem că $r_1\neq 0$ şi fie $r_2=0$. Atunci obţinem $a=[a_{12}-(a_1+a_2-c)(a_1a_{12}+a_{21})]/a_{12}$. Notăm $\Delta_4=a_{12}(a_1-a_2+a_{12})+3a_{21}$, $\Delta_5=a_{12}(a_1^2-a_1a_{12}-1)+2a_1a_{21}$ şi fie $\Delta_4\Delta_5\neq 0$. Exprimăm b din $F_{04}=0$, c din $F_{13}=0$ şi reducem ecuaţiile $\{F_{40}=0, F_{31}=0\}$ după a_2^2 din $F_{22}=0$. Atunci găsim a_2 din $F_{40}=0$ şi obţinem că $F_{31}=u_1u_2u_3u_4\Delta_4\Delta_5$, unde $u_1=3a_1a_{12}+2+2a_{21}$, $u_2=4a_1a_{12}-a_{12}^2+4+4a_{21}$, $u_3=a_1^2+2a_1a_{12}+1+a_{21}$, $u_4=(a_1a_{12}+a_{21})^2+a_{12}^2\neq 0$.

Dacă $u_1=0$, atunci sistemul (4.7) nu este compatibil. Dacă $u_1\neq 0$ şi $u_2=0$, atunci $a_{21}=(a_{12}^2-4a_1a_{12}-4)/4$ şi $F_{22}=0$ are soluţia $a_1=(a_{12}^4-72a_{12}^2-432)/(16a_{12}^3)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii:

(27) $a=(3a_{12}^4-16a_{12}^2+144)/(32a_{12}^2)$, $b=(-5a_{12}^2-36)/(8a_{12})$, $c=(35a_{12}^4-432)/(16a_{12}^3)$, $d=(3a_{12}^4+76a_{12}^2+576)/(16a_{12}^2)$, $f=-1$, $g=(236a_{12}^4-3a_{12}^6-144a_{12}^2-8640)/(128a_{12}^3)$, $a_1=(a_{12}^4-72a_{12}^2-432)/(16a_{12}^3)$, $a_2=(7a_{12}^2+36)/(4a_{12})$

pentru existenţa cubicei invariante

$$64a_{12}^3(x^2+y^2)-x(a_{12}^4x-72a_{12}^2x-432x-16a_{12}^3y)(a_{12}^2x-4x+4a_{12}y)=0.$$

Dacă $u_1u_2\neq 0$ şi $u_3=0$, atunci $a_{21}=-a_1^2-2a_1a_{12}-1$ şi $F_{22}=0$ are soluţia $a_{12}=(-7a_1^4-18a_1^2-27)/(8a_1^3)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii:

(28) $a=(3a_1^6-31a_1^4+81a_1^2+243)/[8a_1^2(a_1^2+9)]$, $b=(7a_1^4+18a_1^2+27)/[2a_1(a_1^2+9)]$, $c=[(a_1^4-18a_1^2-27)(5a_1^2+9)]/[4a_1^3(a_1^2+9)]$, $d=[2a(a_1^2+9)+26a_1^2+18]/(a_1^2+9)$, $f=-1$, $g=(3a_1^8+94a_1^6-288a_1^4-1134a_1^2-243)/[16a_1^3(a_1^2+9)]$, $a_2=-(19a_1^4+54a_1^2+27)/(8a_1^3)$

pentru existenţa cubicei invariante

$$8a_1^3(x^2+y^2)+x(a_1^5x-10a_1^3x-27a_1x+7a_1^4y+18a_1^2y+27y)(a_1x-y)=0.$$

Fie $\Delta_4=0$. Atunci $a_{21}=a_{12}(a_2-a_1-a_{12})/3$ şi ecuaţia $F_{13}=0$ are soluţia $a_2=(a_{12}^2+3a_1a_{12}+6)/(a_{12}+6a_1)$. În acest caz părţile drepte ale sistemului (4.10) au factor comun.

Presupunem că $\Delta_4\neq 0$ şi fie $\Delta_5=0$. Atunci avem $a_{21}=a_{12}(1+a_1a_{12}-a_1^2)/(2a_1)$. Dacă $a_{12}=-2a_1$, părţile drepte ale sistemului (4.10) au factor comun. Dacă $a_{12}\neq -2a_1$, exprimăm c din $F_{22}=0$ şi sistemul (4.7) nu este compatibil.

4.1.3.4. Presupunem că $j_1j_2j_3\neq 0$ şi fie $j_4=0$. Cazul $j_4=0$ este echivalent cu $j_3=0$ dacă luăm în consideraţie simetria $F_{ij}(a_1,a_2)=F_{ij}(a_2,a_1)$ în sistemul de ecuaţii $\{(4.6),\,(4.7)\}$.

Astfel, a fost demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 4.1. *Sistemul cubic* (4.10) *posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică, când* $a_{03}=0$, *dacă şi numai dacă se realizează unul din seturile de condiţii* $(1)-(28)$.

4.2. Condiţii de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante de poziţie generică, cazul $e_1=0$ şi $a_{03}\neq 0$

Fie sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante ce trec prin punctul singular $(0,1)$, adică sistemul cubic are forma (4.10). Pentru acest sistem vom determina condiţiile de existenţă a unei cubice invariante de forma (4.4) când $e_1=0$ (vezi (4.9)).

Cu acest scop, studiem compatibilitatea sistemului de ecuaţii $\{(4.6),(4.7),(4.8)\}$ în raport cu a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01} când $k=(a-1)(a_1+a_2)+g$, $p=(f+2)(a_1+a_2)+b-c$, $m=2-a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d$ şi $a_{03}(a_{03}+1)(a_1-a_2)\neq 0$.

Din ecuaţiile sistemului (4.8) găsim $c_{10}=2a-a_{21}$, $c_{01}=a_{12}-2b$, $d=(3a_{21}-3a_{03}-2a+2f)/2$, $g=(3a_{30}-3a_{12}+2b+2c)/2$, iar ecuaţia $e_1=0$ admite următoarea parametrizare

$$a_{30}=\frac{h^2(27-4h)a_{03}}{108t^3},\ a_{21}=\frac{h(36-5h)a_{03}}{12t^2},\ a_{12}=\frac{(9-h)a_{03}}{t}.$$

Exprimăm c_{02},c_{11}, c_{20} din ecuaţiile $F_{05}=0$, $F_{14}=0$, $F_{23}=0$ ale sistemului (4.6) şi notăm $\Delta_1=18t^2a_1a_2+6t(9-h)(a_1+a_2)+11h^2-144h+486$.

4.2.1. Fie $\Delta_1\neq 0$. În acest caz reducem sistemul de ecuaţii (4.6) cu a din $F_{32}=0$. Atunci obţinem $F_{41}\equiv f_1f_2f_3f_4f_5f_6=0$, unde $f_1=h-6$, $f_2=6ta_1+h$, $f_3=6ta_2+h$, $f_4=3ta_1-4h+27$, $f_5=3ta_2-4h+27$, $f_6=6t(a_1+a_2)-6tc-(f+1)(7h-54)$.

4.2.1.1. Fie $f_1 = 0$, adică $h = 6$. Atunci $F_{41} \equiv 0$, $F_{50} \equiv 0$, iar $F_{32} = 0$ implică $a_1 = [(1-a)t^2 + (c-a_2)t - f - 1]/t$. Notăm $\Delta_2 = 3a_{03}(at^2 + ft^2 - 4f + t^2 - 6) + 3at^2 - 2f^2t^2 + 6f^2 - 5ft^2 + 12f - 5t^2 + 6$ şi $\Delta_3 = 27a_{03}^2(3t^6 + 5t^4 + t^2 - 1) + 144a_{03}t^4(t^2+1) + 64t^6$.

4.2.1.1.1. Presupunem că $f = -2$. În acest caz exprimăm c din $F_{13} = 0$ şi a_2^2 din $F_{22} = 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu a, şi obţinem $Res(F_{40}, F_{31}, a) = g_1g_2g_3$, unde $g_1 = 27a_{03}^2(3t^6 + 5t^4 + t^2 - 1) + 144a_{03}t^4(t^2+1) + 64t^6$, $g_2 = t^2(81a_{03}^2 + 144a_{03} + 64) + 2(27a_{03}^2 + 36a_{03} + 8)$, $g_3 = 3a_{03}(3t^4 + 2t^2 - 1) + 8t^2(t^2 - 1) + 32$.

Fie $g_1 = 0$ şi facem notaţia $t = \sqrt{3}v$. Atunci $g_1 \equiv h_1h_2 = 0$, unde $h_1 = 9a_{03}v^3 + 3a_{03}v^2 + 3a_{03}v + a_{03} + 8v^3$, $h_2 = 9a_{03}v^3 - 3a_{03}v^2 + 3a_{03}v - a_{03} + 8v^3$.

Dacă $h_1 = 0$, atunci $a_{03} = (-8v^3)/[(3v^2+1)(3v+1)]$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante

(1) $b = [-\sqrt{3}(v+1)^3]/[v(3v+1)(3v^2+1)]$, $c = [9v^5 - 9v^4 - 70v^3 - 6v^2 - 3v - 1 - a(3v^2+1)(3v+1)v^2]/[\sqrt{3}v(3v^2+1)(3v+1)]$, $d = -[2(3v^3 + 3v^2 + 9v + 1) + a(3v+1)(3v^2+1)]/[(3v^2+1)(3v+1)]$, $f = -2$, $g = [4(3v-1) + \sqrt{3}(b+c)(3v^2+1)]/[\sqrt{3}(3v^2+1)]$, $a_1 = [\sqrt{3}v(c-a_2) + 3v^2(1-a) - f - 1]/(\sqrt{3}v)$, $27(a-1)(3v^2+1)(3v+1)v^2a_2^2 + 36\sqrt{3}(a-1)(9av^3 + 3av^2 + 3av + a - 9v^3 + 13v)v^3a_2 + 12a^2v^2(9v^3 + 3v^2 + 3v + 1) - av(189v^4 + 27v^3 - 105v^2 + 9v + 8) + 81v^5 + 27v^4 - 21v^3 + 13v^2 - 48v + 12 = 0$, $F_{31} \equiv 3a^2v^2(3v^2+1) - 2av(9v^3 - 3v^2 - 3v + 1) + 9v^4 - 6v^3 - 8v^2 + 6v + 3 = 0$.

Cubica are forma $3\sqrt{3}(3v^2+1)(3v+1)(x^2+y^2) - 8(x + \sqrt{3}vy)^3 = 0$.

Dacă $h_1 \neq 0$ şi $h_2 = 0$, atunci avem $a_{03} = (-8v^3)/[(3v^2+1)(3v-1)]$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante

(2) $b = [\sqrt{3}(1-v)^3]/[v(3v-1)(3v^2+1)]$, $c = [9v^5 + 9v^4 - 70v^3 + 6v^2 - 3v + 1 - a(3v^2+1)(3v-1)v^2]/[\sqrt{3}v(3v^2+1)(3v-1)]$, $d = -[2(3v^3 - 3v^2 + 9v - 1) + a(3v-1)(3v^2+1)]/[(3v^2+1)(3v-1)]$, $f = -2$, $g = [4(3v+1) + \sqrt{3}(b+c)(3v^2+1)]/[\sqrt{3}(3v^2+1)]$, $a_1 = [\sqrt{3}v(c-a_2) + 3v^2(1-a) - f - 1]/(\sqrt{3}v)$, $27(a-1)(3v^2+1)(3v-1)v^2a_2^2 + 36\sqrt{3}(a-1)(9av^3 - 3av^2 + 3av - a - 9v^3 + 13v)v^3a_2 + 12a^2v^2(9v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - av(189v^4 - 27v^3 - 105v^2 - 9v + 8) + 81v^5 - 27v^4 - 21v^3 - 13v^2 - 48v - 12 = 0$, $3a^2v^2(3v^2+1) - 2av(9v^3 + 3v^2 - 3v - 1) + 9v^4 + 6v^3 - 8v^2 - 6v + 3 = 0$.

Cubica are forma $3\sqrt{3}(3v^2+1)(3v-1)(x^2+y^2) - 8(x + \sqrt{3}vy)^3 = 0$.

Presupunem că $g_1 \neq 0$ şi fie $g_2 = 0$. Atunci $t^2 = -2(27a_{03}^2 + 36a_{03} + 8)/(81a_{03}^2 + 144a_{03} + 64)$. În acest caz sistemul de ecuaţii $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0\}$ este compatibil dacă şi numai dacă

$a = 6(9a_{03}^2 + 13a_{03} + 4)/(27a_{03}^2 + 36a_{03} + 8)$. Obţinem următorul set de condiţii

(3) $a = 6(9a_{03}^2 + 13a_{03} + 4)/(27a_{03}^2 + 36a_{03} + 8)$, $b = -3(a_{03} + 1)/t$, $c = (135a_{03}^2 + 114a_{03} - 8)/[2(9a_{03} + 8)t]$, $d = [2t^2(f - a) + 3a_{03}(3 - t^2)]/(2t^2)$, $f = -2$, $g = [2(b + c)t^3 - 3(3t^2 - 1)a_{03}]/(2t^3)$, $a_1 = [(1 - a)t^2 + t(c - a_2) - f - 1]/t$, $t^2 = -2(27a_{03}^2 + 36a_{03} + 8)/(81a_{03}^2 + 144a_{03} + 64)$, $16a_2^2(27a_{03}^2 + 36a_{03} + 8) + 4a_2t(1215a_{03}^3 + 2376a_{03}^2 + 1296a_{03} + 128) + 729a_{03}^4 + 6804a_{03}^3 + 10800a_{03}^2 + 4608a_{03} - 128 = 0$

pentru existenţa cubicei invariante $t^3(x^2 + y^2) + a_{03}(x + ty)^3 = 0$.

Fie $g_1g_2 \neq 0$. Dacă $g_3 = 0$, atunci sistemul de ecuaţii (4.7) nu este compatibil.

4.2.1.1.2. Presupunem că $f \neq -2$ şi fie $\Delta_2 = 0$. În acest caz exprimăm a_2^2 din $F_{13} = 0$ şi a din $\Delta_2 = 0$.

Fie $\Delta_3 = 0$ şi notăm $t = \sqrt{3}v$, atunci $\Delta_3 \equiv h_1h_2 = 0$, unde $h_1 = (9v^3 + 3v^2 + 3v + 1)a_{03} + 8v^3$, $h_2 = (9v^3 - 3v^2 + 3v - 1)a_{03} + 8v^3$.

Fie $h_1 = 0$. Atunci $a_{03} = (-8v^3)/[(3v^2 + 1)(3v + 1)]$ şi $F_{22} \equiv e_1e_2 = 0$, unde $e_1 = (3v^2 + 1)f + 6v^2 - v + 1$ şi $e_2 = 4f^2(3v^2 + 1)(3v + 1)^2(v - 1)^2 + 4f(33v^3 + 6v^2 + 7v + 2)(3v + 1)(v - 1)^2 + 363v^6 - 594v^5 + 144v^4 + 78v^3 + 17v^2 + 20v + 4$.

Dacă $e_1 = 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii

(4) $a = [(3v - 1)v]/(3v^2 + 1)$, $b = \sqrt{3}(1 - v^2)/[(3v^2 + 1)(3v + 1)]$, $d = (-15v^3 - 3v^2 - 13v - 1)/[(3v^2 + 1)(3v + 1)]$, $f = (-6v^2 + v - 1)/(3v^2 + 1)$, $g = [33v^2 - 1 + \sqrt{3}(3v^2 + 1)(3v + 1)c]/[\sqrt{3}(3v^2 + 1)(3v + 1)]$, $a_1 = [3v^2 + 6v - 1 + \sqrt{3}(c - a_2)(3v^2 + 1)]/[\sqrt{3}(3v^2 + 1)]$, $3(3v^2 + 1)(3v + 1)^2(a_2^2 - ca_2) + 6(15v^2 + 1)(v - 1) - \sqrt{3}(3v + 1)((3v^2 + 6v - 1)(3v + 1)a_2 - 3c(3v^2 + 1)(v - 1)) = 0$

pentru existenţa cubicei invariante $3\sqrt{3}(3v + 1)(3v^2 + 1)(x^2 + y^2) - 8(x + \sqrt{3}vy)^3 = 0$.

Fie $e_1 \neq 0$ şi $e_2 = 0$. Notăm $v = -(u^2 + 2)/6$. În acest caz avem $e_2 \equiv e_{21}e_{22} = 0$, unde $e_{21} = 6fu^2(u^2 + 8)(u^2 + 2u + 4) + 11u^6 + 22u^5 + 142u^4 + 172u^3 + 376u^2 + 112u + 128$, $e_{22} = 6fu^2(u^2 + 8)(u^2 - 2u + 4) + 11u^6 - 22u^5 + 142u^4 - 172u^3 + 376u^2 - 112u + 128$.

Dacă $e_{21} = 0$ sau $e_{22} = 0$, obţinem următorele două seturi de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(5) $a = (u^6 + 2u^5 + 13u^4 + 22u^3 + 28u^2 + 8u - 64)/[(u^2 + 2u + 4)(u^2 + 8)u^2]$, $b = [(u^3 - 2u^2 + 20u + 32)(u + 2)^2(2 - u)]/[\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $c = -(u^8 + 4u^7 - 68u^6 - 16u^5 - 816u^4 - 224u^3 - 2624u^2 + 128u - 3072)/[2\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$,

$d = -(3u^8+36u^6+208u^4+96u^3+1216u^2+384u+1024)/[2(u^4+4u^2+16)(u^2+8)u^2]$, $f = -(11u^6+22u^5+142u^4+172u^3+376u^2+112u+128)/[6(u^2+2u+4)(u^2+8)u^2]$, $g = -(u^8+4u^7-18u^6-16u^5-216u^4-80u^3-1088u^2-448u-3584)/[2\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)(u^2+8)u^2]$, $a_1 = [8(3u^2-2u+4)-\sqrt{3}u^2(u^2-2u+4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2-2u+4)]$, $3u^2(u^2-2u+4)a_2^2-8\sqrt{3}(3u^2-2u+4)a_2-(u^2-2u-12)(u^2+8)=0$.

Cubica invariantă este $27\sqrt{3}u^2(u^4+4u^2+16)(x^2+y^2)-8(\sqrt{3}(u^2+2)y-6x)^3=0$.

(6) $a = (u^6-2u^5+13u^4-22u^3+28u^2-8u-64)/[(u^2-2u+4)(u^2+8)u^2]$, $b = [-(u^3+2u^2+20u-32)(u+2)(u-2)^2]/[\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)(u^2+8)u^2]$, $c = -(u^8-4u^7-68u^6+16u^5-816u^4+224u^3-2624u^2-128u-3072)/[2\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)(u^2+8)u^2]$, $d = -(3u^8+36u^6+208u^4-96u^3+1216u^2-384u+1024)/[2(u^4+4u^2+16)(u^2+8)u^2]$, $f = -(11u^6-22u^5+142u^4-172u^3+376u^2-112u+128)/[6(u^2-2u+4)(u^2+8)u^2]$, $g = -(u^8-4u^7-18u^6+16u^5-216u^4+80u^3-1088u^2+448u-3584)/[2\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)(u^2+8)u^2]$, $a_1 = [8(3u^2+2u+4)-\sqrt{3}u^2(u^2+2u+4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2+2u+4)]$, $3u^2(u^2+2u+4)a_2^2-8\sqrt{3}(3u^2+2u+4)a_2-(u^2+2u-12)(u^2+8)=0$.

Cubica invariantă este $27\sqrt{3}u^2(u^4+4u^2+16)(x^2+y^2)-8(\sqrt{3}(u^2+2)y-6x)^3=0$.

Presupunem că $h_1 \neq 0$ şi fie $h_2 = 0$. Atunci $a_{03} = (-8v^3)/[(3v^2+1)(3v-1)]$ şi $F_{22} \equiv j_1 j_2 = 0$, unde $j_1 = (3v^2+)f+6v^2+v+1$ şi $j_2 = 4f^2(3v^2+1)(3v-1)^2(v+1)^2+4f(33v^3-6v^2+7v-2)(3v-1)(v+1)^2+363v^6+594v^5+144v^4-78v^3+17v^2-20v+4$.

Când $j_1 = 0$, se obţine următorul set de condiţii

(7) $a = [(3v+1)v]/(3v^2+1)$, $b = \sqrt{3}(1-v^2)/[(3v^2+1)(3v-1)]$, $d = (-15v^3+3v^2-13v+1)/[(3v^2+1)(3v-1)]$, $f = (-6v^2-v-1)/(3v^2+1)$, $g = [33v^2-1+\sqrt{3}(3v^2+1)(3v-1)c]/[\sqrt{3}(3v^2+1)(3v-1)]$, $a_1 = [-3v^2+6v+1)+\sqrt{3}(c-a_2)(3v^2+1)]/[\sqrt{3}(3v^2+1)]$, $3(3v^2+1)(3v-1)^2(a_2^2-ca_2)-6(15v^2+1)(v+1)+\sqrt{3}(3v-1)((3v^2-6v-1)(3v-1)a_2-3c(3v^2+1)(v+1))=0$

pentru existenţa cubicei invariante $3\sqrt{3}(3v-1)(3v^2+1)(x^2+y^2)-8(x+\sqrt{3}vy)^3=0$.

Fie $j_1 \neq 0$ şi $j_2 = 0$. Efectuăm notaţia $v = (u^2+2)/6$. În acest caz $j_2 \equiv j_{21}j_{22} = 0$, unde $j_{21} = 6fu^2(u^2+8)(u^2-2u+4)+11u^6-22u^5+142u^4-172u^3+376u^2-112u+128$, $j_{22} = 6fu^2(u^2+8)(u^2+2u+4)+11u^6+22u^5+142u^4+172u^3+376u^2+112u+128$.

Dacă $j_{21} = 0$ sau $j_{22} = 0$, obţinem următorele două seturi de condiţii pentru existenţa cubicei invariante:

(8) $a = (u^6 - 2u^5 + 13u^4 - 22u^3 + 28u^2 - 8u - 64)/[(u^2 - 2u + 4)(u^2 + 8)u^2]$, $b = [(u^3 - 2u^2 + 20u - 32)(u + 2)(u - 2)^2]/[\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $c = (u^8 - 4u^7 - 68u^6 + 16u^5 - 816u^4 + 224u^3 - 2624u^2 - 128u - 3072)/[2\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $d = -(3u^8 + 36u^6 + 208u^4 - 96u^3 + 1216u^2 - 384u + 1024)/[2(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $f = -(11u^6 - 22u^5 + 142u^4 - 172u^3 + 376u^2 - 112u + 128)/[6(u^2 - 2u + 4)(u^2 + 8)u^2]$, $g = (u^8 - 4u^7 - 18u^6 + 16u^5 - 216u^4 + 80u^3 - 1088u^2 + 448u - 3584)/[2\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $a_1 = -[8(3u^2 + 2u + 4) + \sqrt{3}u^2(u^2 + 2u + 4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2 + 2u + 4)]$, $3u^2(u^2 + 2u + 4)a_2^2 + 8\sqrt{3}(3u^2 + 2u + 4)a_2 - (u^2 + 2u - 12)(u^2 + 8) = 0$.

Cubica invariantă este $27\sqrt{3}u^2(u^4 + 4u^2 + 16)(x^2 + y^2) - 8(\sqrt{3}(u^2 + 2)y + 6x)^3 = 0$.

(9) $a = (u^6 + 2u^5 + 13u^4 + 22u^3 + 28u^2 + 8u - 64)/[(u^2 + 2u + 4)(u^2 + 8)u^2]$, $b = [(u^3 - 2u^2 + 20u + 32)(u + 2)^2(u - 2)]/[\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $c = (u^8 + 4u^7 - 68u^6 - 16u^5 - 816u^4 - 224u^3 - 2624u^2 + 128u - 3072)/[2\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $d = -(3u^8 + 36u^6 + 208u^4 + 96u^3 + 1216u^2 + 384u + 1024)/[2(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $f = -(11u^6 + 22u^5 + 142u^4 + 172u^3 + 376u^2 + 112u + 128)/[6(u^2 + 2u + 4)(u^2 + 8)u^2]$, $g = (u^8 + 4u^7 - 18u^6 - 16u^5 - 216u^4 - 80u^3 - 1088u^2 - 448u - 3584)/[2\sqrt{3}(u^4 + 4u^2 + 16)(u^2 + 8)u^2]$, $a_1 = -[8(3u^2 - 2u + 4) + \sqrt{3}u^2(u^2 - 2u + 4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2 - 2u + 4)]$, $3u^2(u^2 - 2u + 4)a_2^2 + 8\sqrt{3}(3u^2 - 2u + 4)a_2 - (u^2 - 2u - 12)(u^2 + 8) = 0$.

Cubica invariantă este $27\sqrt{3}u^2(u^4 + 4u^2 + 16)(x^2 + y^2) - 8(\sqrt{3}(u^2 + 2)y + 6x)^3 = 0$.

Fie $\Delta_3 \neq 0$. Vom considera ecuaţia $F_{40} = 0$ care poate fi scrisă sub forma $F_{40} \equiv cR + S = 0$, unde R şi S sunt polinoame în f de gradul trei şi cinci, respectiv.

Fie $R = 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor R şi S în raport cu f şi obţinem

$$Res(R, S, f) = \Delta_3(3a_{03} + t^2)(t^2 - 3).$$

Când $a_{03} = (-t^2)/3$, avem $F_{40} \equiv r_1 r_2 r_3 = 0$, unde $r_1 = 8f + 3t^2 + 7,\ r_2 = 2f^2 + f(t^2 + 4) + 2t^2 + 2,\ r_3 = 6ct + 12f^2 + 36f - 3t^4 + 21t^2 + 26$.

Dacă $r_1 = 0$ sau $r_2 = 0$ sau $r_3 = 0$, atunci sistemul de ecuaţii (4.6) nu este compatibil.

Când $t^2 = 3$, ecuaţia $F_{22} = 0$ implică $a_{03} = (4f + 3)/6$ şi sistemul de ecuaţii (4.7) nu este compatibil.

Fie $R \neq 0$ şi exprimăm c din $F_{40} = 0$. În acest caz rezultanta polinoamelor F_{22} şi F_{31} în raport cu f este $Res(F_{22}, F_{31}, f) = \Delta_3(t^2 - 3)$. Dacă $t^2 = 3$, atunci sistemul de ecuaţii (4.7) nu este compatibil.

4.2.1.1.3. Fie $(f+2)\Delta_2 \neq 0$. În acest caz exprimăm c din $F_{22}=0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu a. Obţinem că $Res(F_{40}, F_{31}, a) = \Delta_2\Delta_3 H$, unde $H = (9a_{03}^2 - 12fa_{03} - 7a_{03} + 4f^2 + 4f)^2(3fa_{03} + 4a_{03} - 2f^2 - 4f - 2)t^2 + (27a_{03}^3 - 54fa_{03}^2 - 45a_{03}^2 + 36f^2a_{03} + 66fa_{03} + 32a_{03} - 8(f+1)^3)(9fa_{03}^2 + 14a_{03}^2 - 12f^2a_{03} - 27fa_{03} - 14a_{03} + 4(f+1)^3)$.

Fie $\Delta_3 = 0$. Dacă notăm $t = \sqrt{3}v$, atunci $\Delta_3 \equiv h_1h_2 = 0$, unde

$$h_1 = (9v^3 + 3v^2 + 3v + 1)a_{03} + 8v^3,\ h_2 = (9v^3 - 3v^2 + 3v - 1)a_{03} + 8v^3.$$

Presupunem că $h_1 = 0$. Atunci $a_{03} = (-8v^3)/[(3v^2+1)(3v+1)]$ şi $F_{31} \equiv s_1s_2 = 0$, unde $s_1 = 3(3v^2+1)(v+1)(f^2+a^2v^2) + 2f(9v^4 + 12v^3 + 16v^2 + 3 - 9av^4 + 3av^3 - 3av^2 + av) - 2av(3v^3 + 9v^2 - v + 1)(3v - 1) + 9v^5 + 39v^4 - 2v^3 + 26v^2 - 3v + 3$, $s_2 = 3av(3v+1)(v^2 - 1) + 2f(3v^2 - 2v + 1)(3v + 1) - (9v^4 - 30v^3 + 3v^2 - 8v - 2)$.

Fie $s_1 = 0$ şi facem notaţia $v = -(u^2+2)/6$. În acest caz $s_1 \equiv s_{11}s_{12} = 0$, unde

$s_{11} = (u^2+2u+4)(u^2+2)(u+2)a + 6f(u^3-8) - u^5 - 4u^4 - 24u^2 - 8u - 80$,

$s_{12} = (u^2-2u+4)(u^2+2)(u-2)a + 6f(u^3+8) - u^5 + 4u^4 + 24u^2 - 8u + 80$.

Dacă $s_{11} = 0$ sau $s_{12} = 0$, obţinem următoarele două seturi de condiţii pentru existenţa cubicei invariante:

(10) $b = -2[9fu^2(u^4+4u^2+16) + 17u^6 + 84u^4 + 240u^2 + 64]/[\sqrt{3}u^2(u^2+2)(u^4+4u^2+16)]$, $d = [4(u^2+8)(u^2+2)(u^2-4) + 3u^2(f-a)(u^4+4u^2+16)]/[3u^2(u^4+4u^2+16)]$, $g = [\sqrt{3}(b+c)(u^4+4u^2+16) - 24(u^2+4)]/[\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)]$, $c = [au^2(u^4+4u^2+16)(8+2u^2-u^3) + u^9 - 2u^8 + 4u^7 - 16u^6 + 72u^5 - 128u^4 + 128u^3 - 576u^2 + 256u - 512]/[2\sqrt{3}u^2(u-2)(u^4+4u^2+16)]$, $f = [u^5 + 4u^4 + 24u^2 + 8u + 80 - a(u^2+2u+4)(u^2+2)(u+2)]/[6(u^3-8)]$, $a_1 = [8(3u^2-2u+4) - \sqrt{3}u^2(u^2-2u+4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2-2u+4)]$, $3u^2(u^2-2u+4)a_2^2 - 8\sqrt{3}(3u^2-2u+4)a_2 - (u^2-2u-12)(u^2+8) = 0$.

Cubica invariantă are forma $27\sqrt{3}u^2(u^4+4u^2+16)(x^2+y^2) - 8(\sqrt{3}(u^2+2)y - 6x)^3 = 0$.

(11) $b = -2[9fu^2(u^4+4u^2+16) + 17u^6 + 84u^4 + 240u^2 + 64]/[\sqrt{3}u^2(u^2+2)(u^4+4u^2+16)]$, $d = [4(u^2+8)(u^2+2)(u^2-4) + 3u^2(f-a)(u^4+4u^2+16)]/[3u^2(u^4+4u^2+16)]$, $g = [\sqrt{3}(b+c)(u^4+4u^2+16) - 24(u^2+4)]/[\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)]$, $c = [-au^2(u^4+4u^2+16)(8+2u^2+u^3) + u^9 + 2u^8 + 4u^7 + 16u^6 + 72u^5 + 128u^4 + 128u^3 + 576u^2 + 256u + 512]/[2\sqrt{3}u^2(u+2)(u^4+4u^2+16)]$, $f = [u^5 - 4u^4 - 24u^2 + 8u - 80 - a(u^2-2u+4)(u^2+2)(u-2)]/[6(u^3-8)]$, $a_1 = [8(3u^2+2u+4) - \sqrt{3}u^2(u^2+2u+4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2+2u+4)]$, $3u^2(u^2+2u+4)a_2^2 - 8\sqrt{3}(3u^2+2u+4)a_2 - (u^2+2u-12)(u^2+8) = 0$.

Cubica invariantă are forma $27\sqrt{3}u^2(u^4+4u^2+16)(x^2+y^2) - 8(\sqrt{3}(u^2+2)y - 6x)^3 = 0$.

Fie $s_1 \neq 0$ şi $s_2 = 0$. Exprimăm f din $s_2 = 0$ şi a din $F_{40} = 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(12) $a = (27v^3+18v^2+3v+4)/[3(3v^2+1)(3v+1)]$, $b = [-\sqrt{3}(v+1)^2]/[(3v^2+1)(3v+1)]$, $c = [-\sqrt{3}(27v^3+207v^2+21v-7)]/[9(3v^2+1)(3v+1)]$, $d = -(45v^3+33v^2+51v+7)/[3(3v^2+1)(3v+1)]$, $f = -(18v^3+5v^2+4v+1)/[(3v^2+1)(3v+1)]$, $g = [-\sqrt{3}(27v^3+108v^2+39v+14)]/[9(3v^2+1)(3v+1)]$, $a_1 = [\sqrt{3}(10-48v-18v^2)-9a_2(1+3v^2)]/[9(1+3v^2)]$, $9(3v^2+1)a_2^2 + 2\sqrt{3}(9v^2+24v-5)a_2 + 3(3v^2+16v+17) = 0$.

Cubica invariantă este $3\sqrt{3}(3v+1)(3v^2+1)(x^2+y^2) - 8(x+\sqrt{3}vy)^3 = 0$.

Presupunem că $h_1 \neq 0$ şi fie $h_2 = 0$. Atunci, avem $a_{03} = (-8v^3)/[(3v^2+1)(3v-1)]$ şi $F_{31} \equiv i_1 i_2 = 0$, unde $i_1 = 3(3v^2+1)(v-1)(f^2+a^2v^2) + 2f(12v^3-9v^4-16v^2-3+9av^4+3av^3+3av^2+av) - 2av(3v^3-9v^2-v-1)(3v+1) + 9v^5-39v^4-2v^3-26v^2-3v-3$, $i_2 = 3av(1-3v)(v^2-1) + 2f(3v^2+2v+1)(3v-1) + 9v^4+30v^3+3v^2+8v-2$.

Fie $i_1 = 0$ şi notăm $v = (u^2+2)/6$. În acest caz avem $i_1 \equiv i_{11} i_{12} = 0$, unde

$i_{11} = (u^2+2u+4)(u^2+2)(u+2)a + 6f(u^3-8) - u^5 - 4u^4 - 24u^2 - 8u - 80$,

$i_{12} = (u^2-2u+4)(u^2+2)(u-2)a + 6f(u^3+8) - u^5 + 4u^4 + 24u^2 - 8u + 80$.

Dacă $i_{11} = 0$ sau $i_{12} = 0$, obţinem următorele două seturi de condiţii pentru existenţa cubicei invariante:

(13) $b = 2[9fu^2(u^4+4u^2+16) + 17u^6 + 84u^4 + 240u^2 + 64]/[\sqrt{3}u^2(u^2+2)(u^4+4u^2+16)]$, $d = [4(u^2+8)(u^2+2)(u^2-4) + 3u^2(f-a)(u^4+4u^2+16)]/[3u^2(u^4+4u^2+16)]$, $g = [\sqrt{3}(b+c)(u^4+4u^2+16) + 24(u^2+4)]/[\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)]$, $c = [au^2(u^4+4u^2+16)(u^3-2u^2-8) - u^9 + 2u^8 - 4u^7 + 16u^6 - 72u^5 + 128u^4 - 128u^3 + 576u^2 - 256u + 512]/[2\sqrt{3}u^2(u-2)(u^4+4u^2+16)]$, $f = [u^5+4u^4+24u^2+8u+80-a(u^2+2u+4)(u^2+2)(u+2)]/[6(u^3-8)]$, $a_1 = [-8(3u^2-2u+4) - \sqrt{3}u^2(u^2-2u+4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2-2u+4)]$, $3u^2(u^2-2u+4)a_2^2 - 8\sqrt{3}(3u^2-2u+4)a_2 - (u^2-2u-12)(u^2+8) = 0$.

Cubica invariantă este $27\sqrt{3}u^2(u^4+4u^2+16)(x^2+y^2) - 8(\sqrt{3}(u^2+2)y+6x)^3 = 0$.

(14) $b = 2[9fu^2(u^4+4u^2+16) + 17u^6 + 84u^4 + 240u^2 + 64]/[\sqrt{3}u^2(u^2+2)(u^4+4u^2+16)]$, $d = [4(u^2+8)(u^2+2)(u^2-4) + 3u^2(f-a)(u^4+4u^2+16)]/[3u^2(u^4+4u^2+16)]$, $g = [\sqrt{3}(b+c)(u^4+4u^2+16) + 24(u^2+4)]/[\sqrt{3}(u^4+4u^2+16)]$, $c = [au^2(u^4+4u^2+16)(u^3+2u^2+8) - u^9 - 2u^8 - 4u^7 - 16u^6 - 72u^5 - 128u^4 - 128u^3 - 576u^2 - 256u - 512]/[2\sqrt{3}u^2(u+2)(u^4+4u^2+16)]$, $f = [u^5-4u^4-24u^2+8u-80-a(u^2-2u+4)(u^2+

$2)(u-2)]/[6(u^3+8)]$, $a_1 = [-8(3u^2+2u+4) - \sqrt{3}u^2(u^2+2u+4)a_2]/[\sqrt{3}u^2(u^2+2u+4)]$, $3u^2(u^2+2u+4)a_2^2 + 8\sqrt{3}(3u^2+2u+4)a_2 - (u^2+2u-12)(u^2+8) = 0$.

Cubica invariantă este $27\sqrt{3}u^2(u^4+4u^2+16)(x^2+y^2) - 8(\sqrt{3}(u^2+2)y+6x)^3 = 0$.

Presupunem că $i_1 \neq 0$ şi fie $i_2 = 0$. Exprimăm f din $i_2 = 0$ şi a din $F_{40} = 0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(15) $a = (27v^3 - 18v^2 + 3v - 4)/[3(3v^2+1)(3v-1)]$, $b = [-\sqrt{3}(v-1)^2]/[(3v^2+1)(3v-1)]$, $c = [\sqrt{3}(27v^3 - 207v^2 + 21v + 7)]/[9(3v^2+1)(3v-1)]$, $d = -(45v^3 - 33v^2 + 51v - 7)/[3(3v^2+1)(3v-1)]$, $f = (-18v^3 + 5v^2 - 4v + 1)/[(3v^2+1)(3v-1)]$, $g = [\sqrt{3}(27v^3 - 108v^2 + 39v - 14)]/[9(3v^2+1)(3v-1)]$, $a_1 = [\sqrt{3}(18v^2 - 48v - 10) - 9a_2(1+3v^2)]/[9(1+3v^2)]$, $9(3v^2+1)a_2^2 - 2\sqrt{3}(9v^2 - 24v - 5)a_2 + 3(3v^2 - 16v + 17) = 0$.

Cubica invariantă este $3\sqrt{3}(3v-1)(3v^2+1)(x^2+y^2) - 8(x+\sqrt{3}vy)^3 = 0$.

Presupunem că $\Delta_3 \neq 0$ şi fie $H = 0$. Reducem ecuaţiile $F_{40} = 0$, $F_{31} = 0$ din (4.7) după t^2 din $H = 0$. În acest caz sistemul de ecuaţii $\{F_{40} = 0,\ F_{31} = 0\}$ este compatibil dacă şi numai dacă $a = [-(27(9f^2+15f+2)a_{03}^5 - 32(f+1)^6(f-1) + 8(30f^3+42f^2-10f-23)(f+1)^3a_{03} - 6(135f^3+324f^2+198f+20)a_{03}^4 + 3(360f^4+1116f^3+1093f^2+299f-46)a_{03}^3 - 2(360f^5+1356f^4+1749f^3+711f^2-209f-166)a_{03}^2)]/[(27a_{03}^3 - 54fa_{03}^2 - 45a_{03}^2 + 36f^2a_{03} + 66fa_{03} + 32a_{03} - 8(f+1)^3)(9fa_{03}^2 + 14a_{03}^2 - 12f^2a_{03} - 27fa_{03} - 14a_{03} + 4(f+1)^3)]$.

În acest caz obţinem următorul set de condiţii:

(16) $a = [-(27(9f^2+15f+2)a_{03}^5 - 32(f+1)^6(f-1) + 8(30f^3+42f^2-10f-23)(f+1)^3a_{03} - 6(135f^3+324f^2+198f+20)a_{03}^4 + 3(360f^4+1116f^3+1093f^2+299f-46)a_{03}^3 - 2(360f^5+1356f^4+1749f^3+711f^2-209f-166)a_{03}^2)]/[(27a_{03}^3 - 54fa_{03}^2 - 45a_{03}^2 + 36f^2a_{03} + 66fa_{03} + 32a_{03} - 8(f+1)^3)(9fa_{03}^2 + 14a_{03}^2 - 12f^2a_{03} - 27fa_{03} - 14a_{03} + 4(f+1)^3)]$, $b = [3(f+1-a_{03})]/t$, $d = [3a_{03}(3-t^2) + 2t^2(f-a)]/(2t^2)$, $g = [3a_{03}(1-3t^2) + 2t^3(b+c)]/(2t^3)$, $c = [2(27(12f+19)a_{03}^5 + 8(2f+3)(f+1)^5) - 3(522f^2+1095f+448)a_{03}^4 - 4(16f^3+112f^2+176f+77)(f+1)^2a_{03} + 2(648f^3+1560f^2+923f+51)a_{03}^3 - (336f^4+528f^3-602f^2-1371f-580)a_{03}^2]/[(9fa_{03}^2 + 14a_{03}^2 - 12f^2a_{03} - 27fa_{03} - 14a_{03} + 4(f+1)^3)(9a_{03}^2 - 12fa_{03} - 7a_{03} + 4f^2 + 4f)t]$, $t^2 = [-(27a_{03}^3 - 54fa_{03}^2 - 45a_{03}^2 + 36f^2a_{03} + 66fa_{03} + 32a_{03} - 8(f+1)^3)(9fa_{03}^2 + 14a_{03}^2 - 12f^2a_{03} - 27fa_{03} - 14a_{03} + 4(f+1)^3)]/[(9a_{03}^2 - 12fa_{03} - 7a_{03} + 4f^2 + 4f)^2(3fa_{03} + 4a_{03} - 2f^2 - 4f - 2)]$, $a_1 = (t^2 - at^2 - a_2t + ct - f - 1)/t$, $2t(f+2)(ta_2 + at^2 - t^2 - ct + f + 1)a_2 + t^2(2aa_{03} + 6af + 14a + 9a_{03}^2 - 6fa_{03} + 3a_{03} - 12f - 18) + 6tc(a_{03} - f - 1) + 3(2(f+1)^2 - 13a_{03}^2 + 4fa_{03} - 3a_{03}) = 0$.

Cubica invariantă este $t^3(x^2+y^2)+a_{03}(x+ty)^3=0$.

4.2.1.2. Presupunem că $f_1\neq 0$ şi fie $f_2=0$. Atunci $F_{41}\equiv 0$, $F_{50}\equiv 0$, $F_{32}=0$, iar $F_{04}=0$ ne implică $a_1=(-h)/(6t)$, $a=[6t(a_2-c)(4h-27)-2f(4h-27)^2+9(2t^2-4h^2+51h-162)]/(18t^2)$, $b=[(f+1-a_{03})(9-h)]/t$.

Fie $h=54/7$. Atunci $a_2=[49t^2(4+6f-9a_{03})+81(6+6f-5a_{03})]/(126t)$ şi $F_{40}\equiv g_1g_2=0$, unde $g_1=81a_{03}-49t^2$, $g_2=18a_{03}+7ct-18f-9$.

Dacă $g_1=0$, atunci $c=[49t^2(-3f-4)+81(2f^2+6f+3)]/(63t)$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa cubicei invariante:

(17) $a=(-2916f^2+5292ft^2-5832f-2401t^4+3969t^2-2916)/(882t^2)$, $b=(81f-49t^2+81)/(63t)$, $c=(162f^2-147ft^2+486f-196t^2+243)/(63t)$, $d=(4374f^2-6615ft^2+8748f+2401t^4-7938t^2+4374)/(1323t^2)$, $g=(324f^2-294ft^2+1134f-637t^2+405)/(126t)$, $a_1=(-9)/(7t)$, $a_2=(2646ft^2+4374f-2401t^4-441t^2+4374)/(1134t)$, $F_{31}\equiv 117649t^6-64827t^4(6f+5)+23814t^2(18f^2+33f+14)-157464(f+1)^3=0$.

Cubica invariantă este $567t(x^2+y^2)+(7ty+9x)^2(7ty-9x)=0$.

Dacă $g_1\neq 0$ şi $g_2=0$, atunci $c=[9(2f+1-2a_{03})]/(7t)$. În acest caz obţinem următoarele două seturi de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(18) $a=13/10,\ b=5/(14t),\ c=(-4)/(7t),\ d=(-16)/15,\ f=(-5)/6,\ g=81/(70t),\ t^2=15/49,\ a_1=(-9)/(7t),\ a_2=1/t$.

Cubica invariantă este $315t(x^2+y^2)+(9x+7ty)(27x^2-5y^2)=0$.

(19) $a=(162a_{03}+63a_2t-243f+49t^2-243)/(49t^2)$, $b=[9(f+1-a_{03})]/(7t)$, $c=[9(2f+1-2a_{03})]/(7t)$, $d=[49t^2(2f-2a-3a_{03})-243a_{03}]/(98t^2)$, $g=[686t^3(b+c)-1323t^2a_{03}-2187a_{03}]/(686t^3)$, $F_{31}\equiv 36a_{03}^3-4a_{03}^2(15f+13)+a_{03}(36f^2+66f+29)-8(f+1)^3=0$, $t^2=[81(6((f+1)^2+2a_{03}^2)-(13f+8)a_{03})]/[49(9a_{03}-6f-4)(f+2)]$, $a_1=(-9)/(7t)$, $a_2=[-54a_{03}^2+9a_{03}(4f-1)+27(f+1)]/[7t(f+2)]$.

Cubica invariantă este $343t^3(x^2+y^2)+a_{03}(7ty+9x)^2(7ty-9x)=0$.

Fie $h\neq 54/7$ şi exprimăm c din $F_{13}=0$. Vom considera ecuaţiile $e_1\equiv F_{40}+18t^2F_{22}=0$ şi $e_2\equiv(7h-54)F_{31}-4(4h^2-27h+18t^2)F_{22}=0$, unde e_1 şi e_2 sunt polinoame de gradul întâi în necunoscuta a_2. Calculăm rezultanta polinoamelor e_1 şi e_2 în raport cu a_2 şi obţinem $Res(e_1,e_2,a_2)=-4t(7h-54)((4h-27)^2+9t^2)h_1h_2$, unde $h_1=81a_{03}^2(h-6)^2+8a_{03}(4h^2-$

$27h-18t^2)-144t^2$, $h_2=12(f+2)t^2(4+6f-9a_{03})+4(2(f+1)^2(4h-27)+9(h-6)a_{03}^2)(4h-27)-(261fh^2-3492fh+11664f+250h^2-3420h+11664)a_{03}$.

Când $h_1=0$ exprimăm a_2 din $e_1=e_2=0$ şi obţinem $F_{22}\equiv j_1j_2=0$, unde $j_1=27(32(4h-27)^2h+729(h-6)^3a_{03}^3+6(361h^2-4158h+11664)(h-6)a_{03}^2)+8(6535h^3-106110h^2+546750h-866052)a_{03}$,

$j_2=128(f+1)^3(4h-27)^2-2187(h-6)^2a_{03}^5-81(23h-162-54(h-6)f)(h-6)a_{03}^4+18(2(2(11h-72)(7h-45)-81(h-6)^2f^2)+3(133h-918)(h-6)f)a_{03}^3-8(8((2h-27-9(h-6)f)f^2+19h-135)(4h-27)+(31h-216)^2f)a_{03}+12((11h-108)(5h-36)+54(h-6)^2f^3-4(37h-216)(4h-27)f-6(103h-702)(h-6)f^2)a_{03}^2$.

În acest caz avem următoarele două seturi de condiţii:

(20) $a=[6t(a_2-c)(4h-27)-2f(4h-27)^2+9(2t^2-4h^2+51h-162)]/(18t^2)$, $b=[(f+1-a_{03})(9-h)]/t$, $c=[4(3(5(5h-63)h+12(t^2+81)-(7fh-54f+22h-162)a_2t)+((68h-891)h+54(t^2+54))f)+(188fh^2-2160fh+216ft^2+5832f+99h^2-1512h-180t^2+5832-24(4h-27)a_2t-3((11h+180)h+108(t^2-18))a_{03})a_{03}]/[24(a_{03}+1)(54-7h)t]$, $d=[4t^2(2f-2a-3a_{03})+a_{03}h(36-5h)]/(8t^2)$, $g=[72t^3(b+c)+108t^2a_{03}(h-9)+a_{03}h^2(27-4h)]/(72t^3)$, $t^2=[(81h^2a_{03}+32h^2-972ha_{03}-216h+2916a_{03})a_{03}]/(144(a_{03}+1))$, $j_1\equiv 27(32(4h-27)^2h+729(h-6)^3a_{03}^3+6(361h^2-4158h+11664)(h-6)a_{03}^2)+8(6535h^3-106110h^2+546750h-866052)a_{03}=0$, $a_1=(-h)/(6t)$, $a_2=[9(64(f+1)(4h-27)^2h-2187(h-6)^3a_{03}^4+54(27fh-162f-110h+702)(h-6)^2a_{03}^3+12(6(73h-459)(h-6)f-(29h-108)(5h-36))(h-6)a_{03}^2)+16(2281h^3-44118h^2+287226h-629856+9(83h-432)(4h-27)(h-6)f)a_{03}]/[48(216h^2a_{03}^2-63h^2a_{03}f+250h^2a_{03}-112h^2f-64h^2-2754ha_{03}^2+864ha_{03}f-2970ha_{03}+1620hf+1296h+8748a_{03}^2-2916a_{03}f+8748a_{03}-5832f-5832)t]$.

Cubica invariantă este $108t^3(x^2+y^2)-a_{03}(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0$.

(21) $a=[6t(a_2-c)(4h-27)-2f(4h-27)^2+9(2t^2-4h^2+51h-162)]/(18t^2)$, $b=[(f+1-a_{03})(9-h)]/t$, $c=[4(3(5(5h-63)h+12(t^2+81)-(7fh-54f+22h-162)a_2t)+((68h-891)h+54(t^2+54))f)+(188fh^2-2160fh+216ft^2+5832f+99h^2-1512h-180t^2+5832-24(4h-27)a_2t-3((11h+180)h+108(t^2-18))a_{03})a_{03}]/[24(a_{03}+1)(54-7h)t]$, $d=[4t^2(2f-2a-3a_{03})+a_{03}h(36-5h)]/(8t^2)$, $g=[72t^3(b+c)+108t^2a_{03}(h-9)+a_{03}h^2(27-4h)]/(72t^3)$, $t^2=[(81h^2a_{03}+32h^2-972ha_{03}-216h+2916a_{03})a_{03}]/(144(a_{03}+1))$, $j_2\equiv 128(f+1)^3(4h-27)^2-2187(h-6)^2a_{03}^5-81(23h-162-54(h-6)f)(h-6)a_{03}^4+$

$18(2(2(11h-72)(7h-45)-81(h-6)^2f^2)+3(133h-918)(h-6)f)a_{03}^3-8(8((2h-27-9(h-6)f)f^2+19h-135)(4h-27)+(31h-216)^2f)a_{03}+12((11h-108)(5h-36)+54(h-6)^2f^3-4(37h-216)(4h-27)f-6(103h-702)(h-6)f^2)a_{03}^2=0$, $a_1=(-h)/(6t)$, $a_2=[9(64(f+1)(4h-27)^2h-2187(h-6)^3a_{03}^4+54(27fh-162f-110h+702)(h-6)^2a_{03}^3+12(6(73h-459)(h-6)f-(29h-108)(5h-36))(h-6)a_{03}^2)+16(2281h^3-44118h^2+287226h-629856+9(83h-432)(4h-27)(h-6)f)a_{03}]/[48(216h^2a_{03}^2-63h^2a_{03}f+250h^2a_{03}-112h^2f-64h^2-2754ha_{03}^2+864ha_{03}f-2970ha_{03}+1620hf+1296h+8748a_{03}^2-2916a_{03}f+8748a_{03}-5832f-5832)t]$.

Cubica invariantă este $108t^3(x^2+y^2)-a_{03}(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0$.

4.2.1.3. Presupunem că $f_1f_2\neq 0$ şi fie $f_3=0$. Acest caz este simetric cu cazul $f_2=0$ şi obţinem seturile de condiţii (17)–(21).

4.2.1.4. Presupunem că $f_1f_2f_3\neq 0$ şi fie $f_4=0$. Atunci $F_{41}\equiv 0$, $F_{50}\equiv 0$, $F_{32}=0$ şi $F_{04}=0$ implică $a_1=(4h-27)/(3t)$, $a=(36t^2-h^2(f+9)+6h(ct+9-a_2t))/(36t^2)$, $b=[(f+1-a_{03})(9-h)]/t$.

Fie $(5h-54)(3ha_{03}-27a_{03}+fh+5h-27)\neq 0$. Exprimăm c din $F_{13}=0$ şi reducem ecuaţiile $F_{40}=0$, $F_{31}=0$ după a_2^2 din $F_{22}=0$. Exprimăm a_2 din $F_{40}=0$ şi obţinem că $F_{31}\equiv h_1h_2h_3=0$, unde $h_1=a_{03}(h^2+36t^2)+36t^2$, $h_2=81(h-6)^2a_{03}+4(4h-27)^2+36t^2$, $h_3=12t^2(4+6f-9a_{03})(f+2)+9h(h-6)a_{03}^2+h(18-7h+9f(4-h))a_{03}+2h^2(f+1)^2$.

Dacă $h_1=0$, atunci $a_{03}=(-36t^2)/(h^2+36t^2)$. În acest caz avem $F_{22}\equiv i_1i_2=0$, unde $i_1=3h^4-184h^2t^2+1728ht^2-144t^4$, $i_2=[f^3(u^2+36)^3+3f^2(u^2+66)(u^2+36)^2+3f(u^4+93u^2+4320)(u^2+36)+u^6+153u^4+4698u^2+279936]t+486u(2fu^2+u^2+72f+144)]$.

Presupunem că $i_1=0$. Ecuaţia $i_1=0$ admite următoarea parametrizare

$$t=(-1728u)/(3u^4-184u^2-144),\ h=(-1728u^2)/(3u^4-184u^2-144)$$

şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(22) $a=-(2fu^4+72fu^2-u^4+84u^2-864)/[24(u^2+36)]$, $b=[-(u^2+72+f(u^2+36))(3u^4+8u^2-144)]/[192(u^2+36)u]$, $d=(8fu^2+96f+23u^2+12)/96$, $c=[-(64fu^4+2304fu^2-3u^6-224u^4+3024u^2+10368)]/[192(u^2+36)u]$, $g=[-(2fu^2+72f-3u^2+108)(u^4+24u^2-48)]/[128(u^2+36)u]$, $a_1=(u^4+24u^2-48)/(64u)$, $a_2=[3(-u^2-4)]/(16u)$.

Cubica invariantă este

$$64u(u^2+36)(x^2+y^2)+(u^4x+24u^2x-64uy-48x)(ux+6y)^2=0.$$

Presupunem că $i_1 \neq 0$ şi fie $i_2 = 0$. Atunci $i_2 = 0$ admite următoarea parametrizare

$t = [486u(-2fu^2 - u^2 - 72f - 144)]/[f^3(u^2+36)^3 + 3f^2(u^2+66)(u^2+36)^2 + 3f(u^4 + 93u^2 + 4320)(u^2+36) + u^6 + 153u^4 + 4698u^2 + 279936]$, $h = ut$.

În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(23) $a = [f^2u^2(u^2+36)+2f(u^2+72)(u^2+9)+u^4+135u^2+2592]/[18(2fu^2+72f+u^2+144)]$, $b = [(u^2+72+f(u^2+36))(9-tu)]/[(u^2+36)t]$, $c = [f^3(u^2+72)(u^2+36)^3+3f^2(u^4+126u^2+4752)(u^2+36)^2+3f(u^6+195u^4+12096u^2+311040)(u^2+36)+u^8+279u^6+26406u^4+1038096u^2+20155392]/[54u(u^2+144+2f(u^2+36))(u^2+36)]$, $d = [2t(f-a)(u^2+36)+9(5tu^2+12t-36u)]/[2t(u^2+36)]$, $g = [4tu(u^2-27)-27(u^2-36)+2t(b+c)(u^2+36)]/[2t(u^2+36)]$, $t = [486u(-2fu^2-u^2-72f-144)]/[f^3(u^2+36)^3+3f^2(u^2+66)(u^2+36)^2+3f(u^4+93u^2+4320)(u^2+36)+u^6+153u^4+4698u^2+279936]$, $a_1 = (4tu-27)/(3t)$, $a_2 = [2f^2(u^2+36)^2 + f(u^2+252)(u^2+36) - u^4 + 18u^2 + 7776]/[6u(u^2+36)]$.

Cubica invariantă este

$$3t(u^2+36)(x^2+y^2) + (4tux - 3ty - 27x)(ux+6y)^2 = 0.$$

Dacă $h_1 \neq 0$ şi $h_2 = 0$, atunci $t^2 = (-81(h-6)^2a_{03} - 4(4h-27)^2)/36$. În acest caz găsim că $F_{22} \equiv j_1j_2 = 0$, unde

$j_1 = 256(4h-27)^4+177147(h-6)^4a_{03}^3+144(113h-702)(4h-27)^2(h-6)a_{03}+729(499h^2-6372h+20412)(h-6)^2a_{03}^2$,

$j_2 = h(243a_{03}^4 - 18a_{03}^3(27f+10) + 3a_{03}^2(108f^2+20f-67) + 2a_{03}(51-36f^3+62f^2+157f) - 8(7f^3+13f^2+5f-1)) - 54(27a_{03}^3 - 54fa_{03}^2 - 45a_{03}^2 + 36f^2a_{03} + 54fa_{03} + 16a_{03} - 8f(f+1)^2)(a_{03}+1)$.

Presupunem că $j_1 = 0$. Ecuaţia $j_1 = 0$ admite următoarea parametrizare

$$a_{03} = (-v^8 - 2v^6 - 3v^4 - 2v^2 - 1)/(3v^4 + 2v^2 + 1),$$
$$h = [54(3v^6 + 9v^4 + 7v^2 + 2)]/(27v^6 + 75v^4 + 59v^2 + 16).$$

În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(24) $a = [2(12v^{10}+42v^8+59v^6+46v^4+20v^2+4)(2v^2+1) + f(3v^4+3v^2+1)(3v^4+2v^2+1)(3v^2+2)(v^2+2)]/[(3v^4+2v^2+1)(3v^2+2)(v^4+v^2+1)v^2]$, $b = [9(v^8+2v^6+6v^4+4v^2+2+f(3v^4+2v^2+1))(9v^6+21v^4+17v^2+4)]/[(27v^6+75v^4+59v^2+16)(3v^4+2v^2+1)t]$, $c = [-18(9v^{16}+39v^{14}+71v^{12}+58v^{10}+11v^8-32v^6-35v^4-18v^2-4-f(3v^6+4v^4+3v^2+1)(3v^4+2v^2+1)(v^2+2))]/[(27v^6+75v^4+59v^2+16)(3v^4+2v^2+1)tv^2]$, $d = [-2(6v^{12}+18v^{10}+36v^8+50v^6+43v^4+20v^2+4+f(v^6+4v^4+3v^2+1)(3v^2+$

$2))]/[(3v^2+2)(v^2+v+1)(v^2-v+1)v^2]$, $g=[-9(27v^{18}+135v^{16}+93v^{14}-434v^{12}-1140v^{10}-1376v^8-1002v^6-456v^4-124v^2-16-f(15v^8+41v^6+39v^4+18v^2+4)(3v^4+2v^2+1)(3v^2+2))]/[(27v^6+75v^4+59v^2+16)(3v^4+2v^2+1)(3v^2+2)tv^2]$, $t^2=(-81(h-6)^2a_{03}-4(4h-27)^2)/36$, $a_1=[-27(v^4+v^2+1)v^2]/[(27v^6+75v^4+59v^2+16)t]$, $a_2=[-9(6v^6+16v^4+13v^2+4)(v^4+v^2+1)]/[(27v^6+75v^4+59v^2+16)t]$.

Cubica invariantă este

$$108t^3(3v^4+2v^2+1)(x^2+y^2)+(v^4+v^2+1)^2(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0.$$

Presupunem că $j_1\neq 0$ şi fie $j_2=0$. Exprimăm h din ecuaţia $j_2=0$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(25) $a=(36t^2-h^2(f+9)+6h(ct+9-a_2t))/(36t^2)$, $b=[(f+1-a_{03})(9-h)]/t$, $d=(-8at^2-5h^2a_{03}+36ha_{03}-12t^2a_{03}+8ft^2)/(8t^2)$, $g=[72(b+c)t^3-a_{03}(4h^3-27h^2-108ht^2+972t^2)]/(72t^3)$, $c=[36t^2(9a_{03}-6f-4)(a_{03}+1)-12tha_2(a_{03}+2f+5)+33h^2a_{03}^2+540ha_{03}^2-5832a_{03}^2-62fh^2a_{03}+432fha_{03}+27h^2a_{03}-216ha_{03}-38fh^2+216fh+42h^2-1188h+5832]/[12t(a_{03}+1)(5h-54)]$, $t^2=(-81(h-6)^2a_{03}-4(4h-27)^2)/36$, $a_1=(4h-27)/(3t)$, $h=[54(27a_{03}^4-54fa_{03}^3-18a_{03}^3+36f^2a_{03}^2-29a_{03}^2-8f^3a_{03}+20f^2a_{03}+46fa_{03}+16a_{03}-8f(f+1)^2)]/(243a_{03}^4-486fa_{03}^3-180a_{03}^3+324f^2a_{03}^2+60fa_{03}^2-201a_{03}^2-72f^3a_{03}+124f^2a_{03}+314fa_{03}+102a_{03}-56f^3-104f^2-40f+8)$, $a_2=[-9(1944a_{03}^7-6480fa_{03}^6-3483a_{03}^6+8640f^2a_{03}^5+8154fa_{03}^5+837a_{03}^5-5760f^3a_{03}^4-6264f^2a_{03}^4+1242fa_{03}^4+1881a_{03}^4+1920f^4a_{03}^3+1104f^3a_{03}^3-4608f^2a_{03}^3-5130fa_{03}^3-1345a_{03}^3-256f^5a_{03}^2+656f^4a_{03}^2+3424f^3a_{03}^2+3976f^2a_{03}^2+1590fa_{03}^2+126a_{03}^2-224f^5a_{03}-720f^4a_{03}-688f^3a_{03}+16f^2a_{03}+336fa_{03}+128a_{03}-32f^5-160f^4-320f^3-320f^2-160f-32)]/[t(8(7f-1)(f+1)^2-243a_{03}^4+18(27f+10)a_{03}^3-3(108f^2+20f-67)a_{03}^2+2(36f^3-62f^2-157f-51)a_{03})(9a_{03}^2-12fa_{03}-11a_{03}+4(f+1)^2)]$.

Cubica invariantă este $108t^3(x^2+y^2)-a_{03}(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0$.

Fie $h_1h_2\neq 0$ şi $h_3=0$. Dacă $f=-2$ şi $a_{03}=(2h)/[9(6-h)]$, atunci obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(26) $a=(h^2+6h-108)/[2(11h^2-162h+594)]$, $b=[(7h-54)(h-9)]/[9t(h-6)]$, $f=-2$, $c=(16h^2-189h+486)/[9t(h-6)]$, $d=[2(73h^2-1089h+4050)(h-9)]/[3(11h^2-162h+594)(h-6)]$, $g=[(137h^3-2844h^2+19332h-42768)(4h-27)]/[18t(11h^2-162h+594)(h-6)]$, $t^2=[(11h^2-162h+594)h^2]/[486(h-8)^2]$, $a_1=(4h-27)/(3t)$, $a_2=[(20h^2-315h+1242)h]/[27t(h-6)(h-8)]$.

Cubica invariantă este $486t^3(h-6)(x^2+y^2)+h(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0$.

Fie $(9a_{03}-6f-4)(f+2)\neq 0$ şi exprimăm t^2 din $h_3=0$:

$t^2=[h(2h(f+1)^2+9(h-6)a_{03}^2-(7h-18+9f(h-4))a_{03})]/[12(9a_{03}-6f-4)(f+2)]$.

În acest caz stabilim că $F_{22}\equiv[16(f+1)^3-81a_{03}^3+9(10f+1)a_{03}^2-2(24f^2+27f+11)a_{03}]h+54a_{03}(9a_{03}-6f-4)(a_{03}+1)=0$. Exprimăm h din $F_{22}=0$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante

(27) $a=(-a_{03}h^2+18ha_{03}-2hta_2-fh^2-h^2+12t^2)/(12t^2)$, $b=[(a_{03}-f-1)(h-9)]/t$, $c=(54a_{03}-3ha_{03}-2fh+6h-54)/(6t)$, $d=[4t^2(-2a-3a_{03}+2f)+a_{03}h(36-5h)]/(8t^2)$, $g=[72t^3(b+c)+108t^2(h-9)a_{03}+a_{03}h^2(27-4h)]/(72t^3)$, $h=[54a_{03}(6f+4-9a_{03})(a_{03}+1)]/[16(f+1)^3-81a_{03}^3+(90fa_{03}+9a_{03}-48f^2-54f-22)a_{03}]$, $a_1=(4h-27)/(3t)$, $t^2=[h(2h(f+1)^2+9(h-6)a_{03}^2-(7h-18+9f(h-4))a_{03})]/[12(9a_{03}-6f-4)(f+2)]$, $a_2=[9a_{03}^2(h-6)+a_{03}(36f-6fh-h+18)-2h(f+1)]/[4t(f+2)]$.

Cubica invariantă este $108t^3(x^2+y^2)-a_{03}(4hx-3ty-27x)(6ty+hx)^2$.

4.2.1.5. Presupunem că $f_1f_2f_3f_4\neq 0$ şi fie $f_5=0$. Acest caz este simetric cu cazul $f_4=0$ şi obţinem seturile de condiţii (22) – (27).

4.2.1.6. Presupune că $f_1f_2f_3f_4f_5\neq 0$ şi fie $f_6=0$. Atunci ecuaţiile $\{F_{50}=0, F_{41}=0, F_{32}=0\}$ sistemului (4.6) ne implică

$a_1=[6ct+(7h-54)(f+1)-6a_2t]/(6t)$, $a=[18t^2+h(f+1)(27-4h)]/(18t^2)$.

Exprimăm b din $F_{04}=0$, a_2^2 din $F_{22}=0$ şi c din $F_{40}=0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{31} şi F_{13} în raport cu f şi obţinem $Res(F_{13},F_{31},f)=s_1\cdots s_6$, unde

$s_1=(135h^2-1782h+5832)a_{03}+128h^2-1728h+5832$, $s_2=1728t^6(9a_{03}+8)^2-432t^4a_{03}[16h(5h-36)+243(h-6)^2a_{03}^2+6(53h^2-576h+1458)a_{03}]-36t^2h^2a_{03}^2[29h^2-288h+64+54(h-6)^2a_{03}]-h^2a_{03}^2[27(7h-48)(h-6)^2a_{03}+4h(4h-27)^2]$, $s_3=(5h^2-36h-36t^2)a_{03}-48t^2\neq 0$, $s_4=(5h^2-36h)a_{03}-12t^2\neq 0$, $s_5=4h^3-27h^2-108ht^2+972t^2\neq 0$, $s_6=432t^6(16(7h-54)^3+243(5h-36)^2(h-6)a_{03}^2+18(125h^2-1836h+6804)(5h-36)a_{03})+3t^2(3(4145h^3-84132h^2+565704h-1259712)(5h-36)(h-6)a_{03}+8(163h^2-2388h+8748)(4h-27)^2h)a_{03}h^2-(5h-36)(4h-27)^2(h-6)a_{03}^2h^5\neq 0$.

Fie $s_1=0$, atunci ecuaţiile $F_{31}=0$ şi $F_{13}=0$ au factorul comun $J=9(h-6)f+17h-108$. Dacă $J=0$, atunci obţinem următorul set de condiţii

(28) $a=[81(t^2+9)h+16h^3-216h^2-486t^2]/[81t^2(h-6)]$, $b=[2h(27-4h)(h-9)]/[27t(5h-36)(h-6)]$, $c=[(71h^2-1062h+3888)(4h-27)]/[27t(5h-36)(h-6)]$, $d=[2(80h^4-$

$1656h^3 - 297h^2t^2 + 11421h^2 + 3969ht^2 - 26244h - 13122t^2)]/[81t^2(5h-36)(h-6)]$, $f = (108-17h)/[9(h-6)]$, $g = [(16h^4-216h^3+189h^2t^2+729h^2-2592ht^2+8748t^2)(4h-27)]/[243t^3(5h-36)(h-6)]$, $a_1 = [(3(5h-36)a_2t - 4(4h-27)(h-9))]/[3t(36-5h)]$, $a_2^2 = [16h^4 - 344h^3 + 21h^2t^2 + 2457h^2 - 288ht^2 - 5832h + 972t^2 + 4(5h-36)(4h-27)(h-9)a_2t]/[3(5h-36)^2t^2]$.

Cubica invariantă este

$$729t^3(5h-36)(h-6)(x^2+y^2) + 2(4h-27)^2(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2 = 0.$$

Fie $J \neq 0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{31} şi F_{13} în raport cu f. Vom obţine că $Res(F_{13}, F_{31}, f) = r_1r_2r_3$, unde $r_1 = 16h^4 - 344h^3 - 12h^2t^2 + 2457h^2 + 216ht^2 - 5832h - 972t^2$, $r_2 = 16h^3 - 216h^2 + 135ht^2 + 729h - 972t^2$, iar r_3 reprezintă factorii diferiţi de zero.

Dacă $r_1 = 0$, atunci ecuaţiile $F_{31} = 0, F_{13} = 0$ ne implică $f = (-53h^2 + 648h - 1944)/[9(5h^2 - 66h + 216)]$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubicei invariante

(29) $a = (-4fh^2+27fh-4h^2+27h+18t^2)/(18t^2)$, $b = [2(108-13h)(4h-27)(h-9)]/[27(5h-36)(h-6)t]$, $c = [(47h^2-702h+2592)(13h-108)(4h-27)]/[243(5h-36)(h-6)(h-8)t)$, $d = [4t^2(2f-2a-3a_{03}) + ha_{03}(36-5h)]/(8t^2)$, $f = (-53h^2+648h-1944)/[9(5h^2-66h+216)]$, $g = [72t^3(b+c) + 108t^2a_{03}(h-9) + h^2a_{03}(27-4h)]/(72t^3)$, $16h^4 - 344h^3 - 12h^2t^2+2457h^2+216ht^2-5832h-972t^2 = 0$, $a_1 = (6ct-6ta_2+7fh-54f+7h-54)/(6t)$, $a_2^2 = [(41h^3 - 1746h^2 + 20088h - 69984)(11h^2 - 168h + 648)(4h-27) - 48(137h^2 - 2070h + 7776)(h-9)^3a_2t]/[243(5h-36)(4h-27)(h-6)(8-h)^2h]$.

Cubica invariantă este

$$243ht(5h-36)(h-6)(h-8)(x^2+y^2) + 8(h-9)^2(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2 = 0.$$

Dacă $r_1 \neq 0$ şi $r_2 = 0$, atunci ecuaţiile $F_{31} = 0, F_{13} = 0$ au factorul comun $K = 27(5h-36)^2(h-6)f^2 + 18f(23h-162)(5h-36)(h-6) + 1427h^3 - 28566h^2 + 190026h - 419904$. Fie $K = 0$, atunci obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubicei invariante

(30) $a = (15fh - 108f + 23h - 162)/[2(4h-27)]$, $b = [(27(f+1)(5h-36)(h-6) + 8(4h-27)^2)(h-9)]/[27(5h-36)(6-h)t]$, $c = [30377h^5 - 1115892h^4 + 16282944h^3 - 118098000h^2 + 426097584h - 612220032 - 81(7h-54)(5h-36)^2(h-6)^2f^2 - 18(199h^3 - 3861h^2 + 24786h - 52488)(5h-36)(h-6)f]/[54(109h^2 - 1458h + 4860 + 9(5h-36)(h-6)f)(5h-36)(h-6)t]$, $d = [4t^2(2f-2a-3a_{03}) + ha_{03}(36-5h)]/(8t^2)$, $g = [72t^3(b + c) + 108t^2a_{03}(h-9) + h^2a_{03}(27-4h)]/(72t^3)$, $K \equiv 27(5h-36)^2(h-6)f^2 + 18f(23h-$

$162)(5h-36)(h-6)+1427h^3-28566h^2+190026h-419904=0$, $16h^3-216h^2+135ht^2+729h-972t^2=0$, $a_1=(6ct-6ta_2+7fh-54f+7h-54)/(6t)$, $a_2^2=[2((345fh^4-17064fh^3+265356fh^2-1679616fh+3779136f+5h^4-9585h^3+210924h^2-1548396h+3779136)(4h-27)a_2-3(135fh^2-2052fh+7776f+215h^2-3240h+12150)(5h-36)(5h-54)t)(4h-27)]/[81(109h^2-1458h+4860+9(5h-36)(h-6)f)(f+1)(5h-36)^2(h-6)t]$.

Cubica invariantă este

$$27ht(h-6)(x^2+y^2)-2(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0.$$

Fie $s_1\neq 0$ şi $s_2=0$. În acest caz vom obţine următorul set de condiţii:

(31) $a=[18t^2+h(f+1)(27-4h)]/(18t^2)$, $b=[(f+1-a_{03})(9-h)]/t$, $c=[3888t^4(2(5fh-36f+12h-90)(f+1)(7h-54)-63(5h-36)(h-9)a_{03}^2+2(75fh-540f-20h+162)(h-9)a_{03})+36t^2(8(f+1)^2(11h-81)(7h-54)(4h-27)-9(113h^2-1908h+7776)(5h-36)a_{03}^2+2(225fh^2-4050fh+17496f+292h^2-4536h+17496)(4h-27)a_{03})h-(4(f+1)(4h-27)-3(5h-36)a_{03})(4h-27)a_{03}h^4]/[7776t^5(45ha_{03}-324a_{03}-30fh+216f-16h+108)-216t^3(8(f+1)(11h-81)(4h-27)-3(31h-216)(5h-36)a_{03})h]$, $d=[4t^2(2f-2a-3a_{03})+ha_{03}(36-5h)]/(8t^2)$, $g=[72t^3(b+c)+108t^2a_{03}(h-9)+h^2a_{03}(27-4h)]/(72t^3)$, $a_1=[6ct+(7h-54)(f+1)-6a_2t]/(6t)$, $a_2^2=[72t^3c(1+2f-3a_{03})+12t^2(3(10f-3-21a_{03})(h-9)a_{03}+(cha_2+14fh-108f+34h-270)(f+1))+2t(((f+1)(7h-54)a_2+6(4h-27)c)(f+1)-6c(5h-36)a_{03})h+(2(f+1)^2(7h-54)(4h-27)-27(4h^2-69h+288)a_{03}^2+(38fh^2-684fh+2916f+50h^2-765h+2916)a_{03})h]/[12t^2h(f+1)]$, $F_{31}\equiv 5184ct^5(2f+1-3a_{03})(3f+4)+432t^4(2((42f^2h-324f^2+157fh-1242f+136h-1080)(f+1)-63(3f+4)(h-9)a_{03}^2)+3(3(20fh-180f+21h-186)f-(23h-216))a_{03})-288t^3(3(21fh-144f+26h-180)a_{03}-(12f+13)(f+1)(4h-27))ch-12t^2(81(45fh^2-730fh+2880f+53h^2-868h+3456)a_{03}^2-4(84fh-648f+143h-1134)(f+1)^2(4h-27)-9(170f^2h^2-2784f^2h+11016f^2+249fh^2-3990fh+15552f+87h^2-1260h+4536)a_{03})h+(16(f+1)^2(7h-54)(4h-27)^2-3(1241h^3-29016h^2+222264h-559872)a_{03}^2+4(85fh^2-1440fh+5832f+109h^2-1602h+5832)(4h-27)a_{03})(f+1)h^2=0$, $F_{13}\equiv 432t^3(3a_{03}-2f-1)(f+2)c+36t^2((31h-324-54(h-10)f^2-(101h-918)f)a_{03}-(2(14f^2h-108f^2+59fh-486f+66h-540)(f+1)-9(13fh-126f+27h-252)a_{03}^2))=0$, $s_2\equiv 1728t^6(9a_{03}+8)^2-432t^4a_{03}[16h(5h-36)+243(h-6)^2a_{03}^2+6(53h^2-576h+1458)a_{03}]-36t^2h^2a_{03}^2[29h^2-288h+64+54(h-6)^2a_{03}]-h^2a_{03}^2[27(7h-48)(h-6)^2a_{03}+4h(4h-27)^2]=0$.

Cubica invariantă este $108t^3(x^2+y^2) - a_{03}(4hx - 3ty - 27x)(hx + 6ty)^2 = 0$.

4.2.2. Fie $\Delta_1 = 0$. Presupunem că $h = 6$, atunci $\Delta_1 \equiv i_1 i_2 = 0$, unde

$$i_1 = a_1 t + 1,\ i_2 = a_2 t + 1.$$

4.2.2.1. Admitem că $i_1 = 0$, adică $a_1 = -1/t$, atunci $F_{50} \equiv 0$, $F_{41} \equiv 0$ şi $F_{32} \equiv 0$. Exprimăm b din $F_{04} = 0$ şi a din $F_{13} = 0$, apoi reducem sistemul $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0, F_{22} = 0\}$ după a_2^2 din $F_{22} = 0$. În acest caz, considerăm ecuaţia $I = t^2 F_{31} + F_{40} = i_{11} i_{12}$, unde $i_{11} = 3(6a_{03} - tc - 2f + 1)a_{03} + (2a_2 f + 4a_2 - 3c)t - 3$, $i_{12} = (t^2+1)a_{03} + t^2$.

Fie $i_{11} = 0$, atunci $c = -[3(2f - 1 - 6a_{03})a_{03} - (2(f+2)a_2 t - 3)]/[3t(a03+1)]$ şi ecuaţiile $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0, F_{22} = 0\}$ au factorul comun $G = 3a_{03} - 2f - 1$.

Presupunem $G = 0$, atunci $a_{03} = (2f+1)/3$ şi obţinem următorul set de condiţii

(32) $a = (2f + 3t^2 + 1)/(2t^2)$, $b = (f+2)/t$, $d = (2f - 2t^2 + 1)/t^2$, $g = [(2ct - 4f + 1)t^2 + 2f + 1]/(2t^3)$, $k = [(2f + 1 + 3t^2)(ct - 2f)]/(2t^3)$, $l = (-f-2)/t$, $m = (-3t^2 + 4tcf - 8f^2 - 2f - 1)/(2t^2)$, $n = [tc(f+2) - 2f(f+3) + t^2 - 1]/t^2$, $p = [tc(f+1) + 2f(-f-2)]/t$, $q = [(4f - 2tc - 1)t^2 + 2tc(2f+1) - 8f^2 - 6f - 1]/2t^3$, $r = -f - 1$, $s = [(2f + t^2 + 1)(ct - 2f)]/(2t^4)$, $a_1 = -1/t$, $a_2 = (ct - 2f)/t$

pentru existenţa cubicei invariante $3(x^2+y^2)t^3 + (2f+1)(x+ty)^3 = 0$.

Admitem că $G \neq 0$, şi notăm $\Delta_4 = 2a_2 t + t^2 + 3$.

Fie $\Delta_4 = 0$, adică $a_2 = (-t^2 - 3)/(2t)$. În acest caz ecuaţia $F_{22} = 0$ implică $t^2 = 3$ şi sistemul $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0\}$ nu este compatibil.

Presupunem că $\Delta_4 \neq 0$, atunci din ecuaţia $F_{22} = 0$ avem $a_{03} = [(a_2^2 - 3)t^2]/[3(t^2 + 3 + 2a_2 t)]$ şi obţinem $F_{40} = (3t^2 - 1)a_2^2 + 8a_2 t - t^2 + 3$.

Dacă $t^2 = 1/3$, atunci $a_2 = -1/(3t)$ şi obţinem următorul set de condiţii

(33) $a = 3(f+1)$, $b = (9f+10)/(3t)$, $c = -5/(3t)$, $d = (-6f - 13)/3$, $g = (9f+5)/(3t)$, $a_1 = -1/t$, $a_2 = -1/(3t)$

pentru existenţa cubicei invariante $9(x^2+y^2)t - (9x^2+y^2)ty - 3(x^2+y^2)x = 0$.

Presupunem că $t^2 \neq 1/3$ şi notăm $t = \sqrt{3}u$. În acest caz avem următoarele două seturi de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(34) $a = [3(3f+7)u^2 + 3f - 4u + 3]/(3u^2+1)$, $b = 3[(f+1)(3u^2+1)(3u+1) + 8u^3)]/[\sqrt{3}(3u^2 + 1)(3u+1)u]$, $c = [54(f+2)u^5 - 57u^4 + 12(f-3)u^3 - 6u^2 - 2(f+4)u - 1]/[\sqrt{3}(3u^2 + 1)(3u+1)(u+1)u]$, $d = [(-6f - 17)u - 2f - 3]/(3u+1)$, $g = [54(f+2)u^5 + 3(9f +$

$10)u^4+12(4f+5)u^3+2(9f+4)u^2+10fu+3f+2]/[\sqrt{3}(3u^2+1)(3u+1)(u+1)u]$, $a_1=-1/(\sqrt{3}u)$, $a_2=[\sqrt{3}(u-1)]/(3u+1)$.

Cubica invariantă este $3\sqrt{3}(3u^2+1)(3u+1)(x^2+y^2)-8((9u^2y^2+x^2)x+3\sqrt{3}(u^2y^2+x^2)uy)=0$.

(35) $a=[3(3f+7)u^2+3f+4u+3]/(3u^2+1)$, $b=3[(f+1)(3u^2+1)(3u-1)+8u^3)]/[\sqrt{3}(3u^2+1)(3u-1)u]$, $c=-[54(f+2)u^5+57u^4+12(f-3)u^3+6u^2-2(f+4)u+1]/[\sqrt{3}(3u^2+1)(3u-1)(u-1)u]$, $d=[(-6f-17)u+2f+3]/(3u-1)$, $g=[54(-f-2)u^5+3(9f+10)u^4+12(-4f-5)u^3+2(9f+4)u^2-10fu+3f+2]/[\sqrt{3}(3u^2+1)(3u-1)(u-1)u]$, $a_1=-1/(\sqrt{3}u)$, $a_2=[-\sqrt{3}(u+1)]/(3u-1)$.

Cubica invariantă este $3\sqrt{3}(3u^2+1)(3u-1)(x^2+y^2)-8((9u^2y^2+x^2)x-3\sqrt{3}(u^2y^2+x^2)uy)=0$.

Fie $i_{11}\neq 0$ şi $i_{12}=0$. În acest caz $a_{03}=-t^2/(t^2+1)$ şi notăm $\Delta_5=2a_2t+9$.

Presupunem că $\Delta_5=0$, adică $a_2=-9/(2t)$. Atunci obţinem că $F_{22}=(2ft^2+2f+4t^2+1)(t^2-27)$. Dacă $t^2=27$, atunci găsim următorul set de condiţii

(36) $a=(-42f-17-14ct)/126$, $b=3(28f+55)/(28t)$, $d=(14ct+168f+179)/126$, $g=(28ct+84f+285)/(28t)$, $a_1=-1/t$, $a_2=-9/(2t)$, $t^2=27$

pentru existenţa cubicei invariante $28(x^2+y^2)t-((x^2+81y^2)x+3(x^2+9y^2)ty)=0$.

Fie $t^2-27\neq 0$. Exprimăm f şi c din ecuaţiile $\{F_{22}=0, F_{31}=0\}$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(37) $a=(3t^2)/(2t^2+2)$, $b=3/(2t^2+2)t$, $c=(-17t^2-11)/[2(t^2+1)t]$, $d=(-2t^2-5)/(t^2+1)$, $f=(-4t^2-1)/(2t^2+2)$, $g=(-8t^2-11)/[2(t^2+1)t]$, $a_1=-1/t$, $a_2=-9/(2t)$

pentru existenţa cubicei invariante $(t^3+t)(x^2+y^2)-(ty+x)^3=0$.

Presupunem că $\Delta_5\neq 0$. Exprimăm c din ecuaţia F_{22}, atunci $F_{31}\equiv(4a_2^3-a_2)t^3+(32a_2^2-5)t^2+(4a_2^3+63a_2)t+27=0$. În acest caz determinăm următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(38) $a=[8a_2^2(f+2)t^4+6a_2(10f+21)t^3+(16a_2^2f+20a_2^2+102f+231)t^2+30a_2(2f+1)t+4(2f+1)a_2^2+102f+51]/[2(2a_2t+9)(t^2+1)]$, $b=3[(f+1)(t^2+1)+t^2]/[(t^2+1)t]$, $c=[2a_2(f+2)t^5+2(a_2^2+5f+10)t^4+2a_2(4f+7)t^3+(2a_2^2+10f-31)t^2+2a^2(3f+5)t-9]/[(2a_2t+9)(t^2+1)t]$, $d=[-4a_2^2(f+2)t^4-4a_2(7f+15)t^3-2(4a_2^2f+5a_2^2+21f+51)t^2-4a_2(7f+6)t-2(2a_2^2f+a_2^2+21f+33)]/[(2a_2t+9)(t^2+1)]$, $g=[4a_2(f+2)t^5+4(a_2^2+5f+10)t^4+14a_2(2f+5)t^3+(4a_2^2+74f+127)t^2+2a_2(12f+13)t+$

$9(6f+1)]/[2(2a_2t+9)(t^2+1)t]$, $F_{31} \equiv 4(t^3+t)a_2^3+32t^2a_2^2-t^3a_2+63ta_2-5t^2+27$, $a_1=-1/t$.

Cubica invariantă este $(t^3+t)(x^2+y^2)-(ty+x)^3=0$.

4.2.2.1.2. Presupunem $i_1 \neq 0$ şi fie $i_2=0$. Acest caz este simetric cu cazul $i_1=0$ şi obţinem seturile de condiţii (32)–(38).

4.2.2.2. Fie $f_1 \neq 0$ şi $f_2=0$. În acest caz $a_1=-h/(6t)$ şi ecuaţiile $F_{50}=0$, $F_{41}=0$, $F_{32}=0$ ne implică $a_2=(4h-27)/(3t)$. Exprimăm b din $F_{04}=0$, a din $F_{13}=0$ şi notăm $\Delta_6=3a_{03}(11h^2-144h+18t^2+486)+2(13h^2-189h+27t^2+729)$.

Fie $\Delta_6=0$, atunci $a_{03}=[2(-13h^2+189h-27t^2-729)]/[3(11h^2-144h+18t^2+486)]$. Astfel obţinem că $F_{22} \equiv u_1u_2=0$, unde $u_1=17h^3-513h^2+45ht^2+4617h-486t^2-13122$, $u_2=22fh^2-288fh+36ft^2+972f+37h^2-522h+72t^2+1944$.

Presupunem că $u_1=0$, adică $t^2=(-17h^3+513h^2-4617h+13122)/[9(5h-54)]$. Atunci obţinem ecuaţiile

$F_{40} \equiv [18((h-9)f-ct)(h-6)+50h^2-603h+1458](2h-27)(h-9)(h-18)=0$,

$F_{31} \equiv [7h-18+6(h-6)f](2h-27)(h-9)(h-18)=0$.

Dacă $h=9$ sau $h=18$, ecuaţia $u_1=0$ nu are soluţii reale. Pentru $h=27/2$ obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(39) $a=(10ct-45f-81)/45$, $b=[-9(5f+9)]/(10t)$, $d=(-20ct+180f+459)/90$, $g=(10ct-45f-108)/(10t)$, $a_1=(-9)/(4t)$, $a_2=9/t$, $t^2=81/4$.

Cubica invariantă este $5(x^2+y^2)t+(7x^2-4y^2)ty+9(x^2+2y^2)x=0$.

Fie $(2h-27)(h-9)(h-18) \neq 0$. Exprimăm f şi c din ecuaţiile $F_{31}=0$ şi $F_{40}=0$. În acest caz avem următorul set de condiţii

(40) $a=(128h^4-5085h^3+67311h^2-367416h+708588)/[6(17h^3-513h^2+4617h-13122)(h-6)]$, $b=(5h-54)(9-h)/[18(h-6)t]$, $c=(29h^2-360h+972)/[18(h-6)t]$, $d=(127h^4+4140h^3-48114h^2+244944h-472392)/[3(17h^3-513h^2+4617h-13122)(h-6)]$, $f=(18-7h)/[6(h-6)]$, $g=[(46h^3-1377h^2+10692h-26244)(4h-27)(h-9)]/[18(17h^3-513h^2+4617h-13122)(h-6)t]$, $a_1=(-h)/(6t)$, $a_2=(4h-27)/(3t)$, $t^2=(-17h^3+513h^2-4617h+13122)/[9(5h-54)]$

pentru existenţa cubicei invariante

$27(17h^3-513h^2+4617h-13122)(h-6)(x^2+y^2)t-4h^5x(5x^2-51y^2)-3h^4ty(75x^2+68y^2)+27h^4x(13x^2-296y^2)+162h^3ty(25x^2+38y^2)-1458h^3x(x^2-76y^2)-2916h^2ty(6x^2+19y^2)-656100h^2xy^2+157464hty^3+1417176hxy^2=0$.

Fie $u_1\neq 0$ şi $u_2=0$. Exprimăm f din $u_1=0$. Atunci ecuaţiile F_{40}, F_{31} au soluţia comună $c=[6((13t^2+1161)h-108(t^2+27))+(43h-942)h^2]/[2((11h-144)h+18(t^2+27))t]$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(41) $a=[(65h-1413)h^3+972(t^2+27)t^2-8748(t^2+3)h+243(3t^2+43)h^2]/(36t^2w)$, $b=[(7h-54)(9-h)h]/(6tw)$, $c=[6((13t^2+1161)h-108(t^2+27))+(43h-942)h^2]/(2tw)$, $d=[(65h-1413)h^3-648(t^2+27)t^2+324(13t^2-81)h-9(29t^2-1161)h^2]/(18t^2w)$, $f=[-((37h-522)h+72(t^2+27))]/(2w)$, $g=[((13h^3-189h^2-2592t^2)h+324(t^2+27)t^2+9(25t^2+81)h^2)(4h-27)]/(108t^3w)$, $a_1=(-h)/(6t)$, $a_2=(4h-27)/(3t)$, $w=11h^2-144h+18t^2+486$.

Cubica invariantă este $162((11h-144)h+18(t^2+27))(x^2+y^2)t^3+(13h^2-189h+27t^2+729)(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0$.

Presupunem că $\Delta_6\neq 0$. Exprimăm c din $F_{22}=0$ şi ecuaţiile $\{F_{40}=0,F_{31}=0\}$ au factorul comun $G=3a_{03}-2f-1$.

Fie $G=0$, atunci $a_{03}=(2f+1)/3$ şi obţinem următorul set de condiţii

(42) $a=(-10fh^2+72fh-5h^2+36h+108t^2)/(72t^2)$, $b=(f+2)(9-h)/(3t)$, $c=(-4fh+36f+5h-36)/(6t)$, $d=(-10fh^2+72fh-5h^2+36h-72t^2)/(36t^2)$, $g=(-2fh^2-h^2+36t^2)(4h-27)/(216t^3)$, $a_1=(-h)/(6t)$, $a_2=(4h-27)/(3t)$

pentru existenţa cubicei invariante $324t^3(x^2+y^2)-(2f+1)(4hx-3ty-27x)(hx+6ty)^2=0$.

Admitem că $G\neq 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu t şi obţinem $Res(F_{40},F_{31},t)=i_1i_2i_3i_4i_5i_6i_7$, unde $i_1=7h-54$, $i_2=9a_{03}h-54a_{03}+4h$, $i_3=9a_{03}h-54a_{03}+7h-54$, $i_4=9a_{03}h-54a_{03}+8h-54$, $i_5=9a_{03}h-54a_{03}+16h-108$, $i_6=9(7h-54)(h-6)a_{03}+4(4h-27)^2$, $i_7=16(4h-27)^2+405(h-6)^2a_{03}^2+36(17h-108)(h-6)a_{03}$.

Fie $i_1=0$, adică $h=54/7$. Considerăm ecuaţiile $F_{40}=(81a_{03}-49t^2)(2a_{03}+1)$, $F_{31}=54a_{03}^2+49a_{03}t^2+216a_{03}+49t^2+54$ din (4.7).

Dacă $a_{03}=(49t^2)/81$, atunci ecuaţia $F_{31}=0$ nu are soluţii reale.

Fie $a_{03}=-1/2$. În acest caz obţinem următoarele două seturi de condiţii:

(43) $a=(6f+11)/2$, $b=(2f+3)/2$, $c=2(f+1)$, $d=-2(f+2)$, $g=3f+5$, $a_1=-1$, $a_2=1$, $t=9/7$.

Cubica invariantă este $2(x^2+y^2)+(x+y)^2(x-y)=0$.

(44) $a=(6f+11)/2$, $b=(-2f-3)/2$, $c=-2(f+1)$, $d=-2(f+2)$, $g=-3f-5$, $a_1=1$, $a_2=-1$, $t=(-9)/7$.

Cubica invariantă este $2(x^2+y^2)-(x+y)(x-y)^2=0$.

Presupunem că $i_1\neq 0$ şi fie $i_2=0$. Atunci $a_{03}=(-4h)/[9(h-6)]$. Ecuaţiile $\{F_{40}=0, F_{31}=0\}$ au soluţia comună $t^2=h^3/[9(5h-54)]$ şi obţinem următorul set de condiţii

(45) $a=[-(18fh^2-270fh+972f+4h^2+9h-486)]/[3(h-6)h]$, $b=[(9(f+1)(h-6)+4h)(9-h)]/[9(h-6)t]$, $c=[-(3fh^2-18fh-11h^2+171h-486)]/[9(h-6)t]$, $d=(14fh-108f+29h-270)/(2h)$, $g=[-(6fh-36f-h+54)(4h-27)]/[18(h-6)t]$, $a_1=(-h)/(6t)$, $a_2=(4h-27)/(3t)$, $t^2=h^3/[9(5h-54)]$

pentru existenţa cubicei invariante $27(h-6)(x^2+y^2)ht+4h^3x(5x^2+3y^2)+3h^2ty(75x^2-4y^2)-27h^2x(13x^2+4y^2)-4050htx^2y+1458hx^3+17496tx^2y=0$.

Presupunem $i_1i_2\neq 0$ şi fie $i_3=0$, adică $a_{03}=[-(7h-54)]/[9(h-6)]$. În acest caz calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu t şi obţinem $Res(F_{40},F_{31},t)=(5h-36)i_2$. Dacă $h=36/5$, atunci sistemul de ecuaţii $\{F_{40}=0,F_{31}=0\}$ nu este compatibil.

Fie $i_1i_2i_3\neq 0$ şi $i_4=0$. Din $i_4=0$ găsim $a_{03}=[2(-4h+27)]/[9(h-6)]$ şi ecuaţiile $F_{40}=0$ şi $F_{31}=0$ au factorul comun $H=4h^2-27h-18t^2$.

Presupunem $H=0$, atunci $t^2=[h(4h-27)]/18$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(46) $a=(18fh-108f+47h-306)/[6(h-6)]$, $b=[(9fh-54f+17h-108)(9-h)]/[9(h-6)t]$, $c=(48fh^2-612fh+1944f+125h^2-1710h+5832)/[18(h-6)t]$, $d=-2(f+2)$, $g=(30fh^2-342fh+972f+71h^2-837h+2430)/[18(h-6)t]$, $a_1=(-h)/(6t)$, $a_2=(4h-27)/(3t)$, $t^2=[h(4h-27)]/18]$.

Cubica invariantă este $27(h-6)(x^2+y^2)t+4h^2x(x^2+6y^2)+3hty(15x^2-8y^2)-27hx(x^2+14y^2)+162ty(-2x^2+y^2)+1458xy^2=0$.

Fie $H\neq 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu t şi obţinem $Res(F_{40},F_{31},t)=i_2$. Prin urmare, sistemul de ecuaţii $\{F_{40}=0,F_{31}=0\}$ nu este compatibil.

Presupunem $i_1i_2i_3i_4\neq 0$ şi fie $i_5=0$. Atunci $a_{03}=[-4(4h-27)]/[9(h-6)]$ şi ecuaţiile $F_{40}=0$ şi $F_{31}=0$ au factorul comun $I=8(2h-27)h+9(t^2+81)$. Ecuaţia $I=0$ nu are soluţii reale şi, prin urmare, sistemul $\{F_{40}=0,F_{31}=0\}$ nu este compatibil.

Fie $I \neq 0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu t. Obţinem că $Res(F_{40}, F_{31}, t) = i_2$. În acest caz sistemul de ecuaţii $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0\}$ nu este compatibil.

Presupunem $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 \neq 0$ şi fie $i_6 = 0$. Din $i_6 = 0$ găsim $a_{03} = [-4(4h-27)^2]/[9(7h-54)(h-6)]$, iar ecuaţiile $F_{40} = 0$ şi $F_{31} = 0$ au factorul comun $J = (4h+27)^2 + (3t)^2 \neq 0$. Prin urmare, sistemul $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0\}$ nu este compatibil.

Calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi F_{31} în raport cu t. Obţinem că $Res(F_{40}, F_{31}, t) = i_1 i_2 i_3 i_4 \neq 0$. Prin urmare, sistemul $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0\}$ nu este compatibil.

Presupunem $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \neq 0$ şi fie $i_7 = 0$. Notăm $a_{03} = (-4z^2)/(z^2+1)^2$. Vom obţine $i_7 \equiv i_{71} i_{72} = 0$, unde $i_{71} = (4z^4 + 9z^3 - z^2 - 9z + 4)h - 27(z^4 + 2z^3 - 2z + 1)$, $i_{72} = (4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)h - 27(z^4 - 2z^3 + 2z + 1)$.

Fie $i_{71} = 0$, atunci $h = [27(z^4+2z^3-2z+1)]/(4z^4+9z^3-z^2-9z+4)$ şi ecuaţiile $F_{40} = 0$ şi $F_{31} = 0$ au factorul comun $K = (4z^4 + 9z^3 - z^2 - 9z + 4)^2 t^2 - 81(2z-1)(z+2)z^3$.

Presupunem că $K = 0$. Din $K = 0$ găsim $t^2 = [81(2z-1)(z+2)z^3]/(4z^4+9z^3-z^2-9z+4)^2$ şi obţinem următorul set de condiţii

$$
\begin{aligned}
(47)\quad & a = [z^{10} + 7z^9 + 41z^8 + 144z^7 + 184z^6 - 110z^5 - 184z^4 + 144z^3 - 41z^2 + 7z - 1 + 2(z^4 + \\
& 3z^3 + 2z^2 - 3z + 1)(z^2+1)^2(2z-1)(z+2)f]/[2(z^2+1)^2(2z-1)(z+2)(z+1)(z-1)z], \\
& b = [9(z^4+6z^2+1+(z^2+1)^2 f)(z^4+3z^3-z^2-3z+1)]/[(4z^4+9z^3-z^2-9z+4)(z^2+1)^2 t], \\
& c = [-9(z^{10} + 5z^9 + 5z^8 + 32z^7 - 44z^6 - 138z^5 + 44z^4 + 32z^3 - 5z^2 + 5z - 1 + 2(z^4 - \\
& 2z^3 - 6z^2 + 2z + 1)(z^2+1)^2 f z)]/[2(4z^4 + 9z^3 - z^2 - 9z + 4)(z^2+1)^2(z+1)(z-1)t], \\
& d = [-(4z^6 + 31z^5 + 54z^4 - 14z^3 - 54z^2 + 31z - 4 + 2(z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1)(2z - \\
& 1)(z+2)f)]/[2(2z-1)(z+2)(z+1)(z-1)z],\ g = [-9(z^{12} + 4z^{11} - 37z^{10} - 144z^9 - \\
& 73z^8 + 116z^7 + 26z^6 - 116z^5 - 73z^4 + 144z^3 - 37z^2 - 4z + 1 - 2(z^6 + 2z^5 + 2z - 1)(z^2 + \\
& 1)^2(2z-1)(z+2)f)]/[2(4z^4 + 9z^3 - z^2 - 9z + 4)(z^2+1)^2(2z-1)(z+2)(z+1)(z-1)t], \\
& a_1 = (-h)/(6t),\ a_2 = (4h-27)/(3t),\ t^2 = [81(2z-1)(z+2)z^3]/(4z^4+9z^3-z^2-9z+4)^2
\end{aligned}
$$

pentru existenţa cubicei invariante $(x^2+y^2)(4z^4 + 9z^3 - z^2 - 9z + 4)(z^2+1)^2(2z-1)(z+2)tz - (((z^4+6z^3-4z^2-6z+1)(z^4+2z^3-2z+1)x^2 + 4(2z-1)(z+2)y^2 z^3)(4z^4+9z^3-z^2-9z+4)ty + 9(4(z^4+3z^3-z^2-3z+1)(2z-1)(z+2)y^2 z^2 + (z^4+2z^3-2z+1)^2(z^2-z-1)x^2)xz) = 0$.

Fie $K \neq 0$. Din ecuaţia $F_{31} = 0$ avem $t^2 = [27(2z^{10} + 7z^9 + 13z^8 + 13z^7 - 13z^6 - 24z^5 + 13z^4 + 13z^3 - 13z^2 + 7z - 2)z]/[(4z^4 + 9z^3 - z^2 - 9z + 4)^2(z+1)^2(z-1)^2]$, iar ecuaţia $F_{40} \equiv 2z^4 + 2z^3 - 3z^2 - 2z + 2 = 0$ nu are soluţii reale. Prin urmare, sistemul $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0\}$ nu este compatibil.

Presupunem că $i_{71} \neq 0$ şi fie $i_{72} = 0$. Atunci găsim $h = [27(z^4 - 2z^3 + 2z + 1)]/(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)$, iar ecuaţiile $F_{40} = 0$, $F_{31} = 0$ au factorul comun $L = (4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)^2 t^2 + 81(2z + 1)(z - 2)z^3$.

Fie $L = 0$, atunci $t^2 = [81(2z+1)(2-z)z^3]/(4z^4-9z^3-z^2+9z+4)^2$ şi obţinem următorul set de condiţii pentru existenţa unei cubice invariante:

(48) $a = [-(z^{10} - 7z^9 + 41z^8 - 144z^7 + 184z^6 + 110z^5 - 184z^4 - 144z^3 - 41z^2 - 7z - 1 + 2(z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 3z + 1)(z^2 + 1)^2(2z + 1)(z - 2)f)]/[2(z^2 + 1)^2(2z + 1)(z^2 - 1)(z - 2)z]$, $b = [9(z^4+6z^2+1+(z^2+1)^2 f)(z^4-3z^3-z^2+3z+1)]/[(4z^4-9z^3-z^2+9z+4)(z^2+1)^2 t]$, $c = [-9(z^10 - 5z^9 + 5z^8 - 32z^7 - 44z^6 + 138z^5 + 44z^4 - 32z^3 - 5z^2 - 5z - 1 - 2(z^4 + 2z^3 - 6z^2 - 2z + 1)(z^2 + 1)^2 fz)]/[2(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)(z^2 + 1)^2(z + 1)(z - 1)t]$, $d = [4z^6 - 31z^5 + 54z^4 + 14z^3 - 54z^2 - 31z - 4 + 2(z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1)(2z + 1)(z - 2)f]/[2(2z + 1)(z^2 - 1)(z - 2)z]$, $g = [-9(z^{12} - 4z^{11} - 37z^{10} + 144z^9 - 73z^8 - 116z^7 + 26z^6 + 116z^5 - 73z^4 - 144z^3 - 37z^2 + 4z + 1 - 2(z^6 - 2z^5 - 2z - 1)(z^2 + 1)^2(2z + 1)(z - 2)f)]/[2(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)(z^2 + 1)^2(2z + 1)(z^2 - 1)(z - 2)t]$, $a_1 = [-9(z^4 - 2z^3 + 2z + 1)]/[2(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)t]$, $a_2 = [9(z^2 + z - 1)z]/[(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9^z + 4)t]$, $t^2 = [81(2z + 1)(2 - z)z^3]/(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)^2$.

Cubica invariantă este $(x^2 + y^2)(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)(z^2 + 1)^2(2z + 1)(z - 2)tz - (9((z^4 - 2z^3 + 2z + 1)^2(z^2 + z - 1)x^2 + 4(z^4 - 3z^3 - z^2 + 3z + 1)(2z + 1)(z - 2)y^2 z^2)xz - ((z^4 - 2z^3 + 2z + 1)(z^4 - 6z^3 - 4z^2 + 6z + 1)x^2 - 4(2z + 1)(z - 2)y^2 z^3)(4z^4 - 9z^3 - z^2 + 9z + 4)ty) = 0$.

Astfel, a fost demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 4.2. *Sistemul cubic* (4.10) *posedă două drepte invariante* (4.1) *şi o cubică invariantă ireductibilă* (4.4) *de poziţie generică, când $e_1 = 0$, dacă şi numai dacă se realizează unul din seturile de condiţii* (1) – (48).

4.3. Condiţii de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante de poziţie generică, cazul $e_2 = 0$ şi $a_{03}e_1 \neq 0$

În această secţiune, pentru sistemul cubic (2.1) vom determina condiţiile de existenţă a două drepte invariante de forma (4.1) şi a unei cubice invariante de forma (4.4) când $e_2 = 0$ (vezi (4.9)). Cu acest scop, se studiază compatibilitatea sistemului $\{(4.3), (4.6), (4.7), (4.8)\}$ în raport cu a_1, a_2, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}, când $a_{03}(a_{03}+1)(a_1-a_2)e_1 \neq 0$.

Din ecuaţiile sistemului (4.8) găsim $c_{10} = 2a - a_{21}$, $c_{01} = a_{12} - 2b$, $d = (3a_{21} - 3a_{03} - 2a + 2f)/2$, $g = (3a_{30} - 3a_{12} + 2b + 2c)/2$, iar ecuaţia $e_2 = 0$ ne implică $a_{30} = -a_1(a_{03}a_1^2 + a_{12}a_1 + a_{21})$.

Exprimăm c_{02}, c_{11}, c_{20} din ecuaţiile $F_{05} = 0$, $F_{14} = 0$, $F_{23} = 0$ ale sistemului (4.6) şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{32} şi F_{41} în raport cu k. Vom obţine că

$Res(F_{32}, F_{41}, k) = a_{03}^3e_1G$, unde $G = (2a + 3a_{03} - 2f + 2m - 2)a_{03}^2 + 2a_1^2a_{03}^2(f+2) + 2a_1a_{03}^2(b-c-p) + 2a_{12}a_{03}(b-p) + a_{21}a_{03}(2f+2-3a_{03}) - 2a_{12}^2(f+1)$.

Fie $G = 0$ şi exprimăm m din această ecuaţie. Atunci avem $F_{32} \equiv a_{03}g_1g_2$, unde $g_1 = 2a_{12}(a_{12}a_1 + a_{21})(f+1) - 2a_{03}(a_{12}a_1 + a_{21} + a_{03}a_1^2)(b-p) - 3(a_{12} + a_{21}a_1 + a_{03}a_1^3)a_{03}^2 + a_{12}a_1^2a_{03}(2f + 2 - 3a_{03}) + 2a_1a_{03}^2(a-1) + 2a_{03}^2(b+c-k)$, $g_2 = 3a_{03}a_1 + a_{12}$. Vom cerceta două cazuri posibile: $g_1 = 0$ şi $g_1 \neq 0$, $g_2 = 0$.

4.3.1. Presupunem că $g_1 = 0$ şi exprimăm k din ecuaţia $g_1 = 0$. Atunci $F_{50} \equiv F_{41} \equiv F_{32} \equiv 0$. Reducem ecuaţiile sistemului (4.6) după b din $F_{04} = 0$ şi exprimăm a din $F_{13} = 0$.

Notăm $\Delta_1 = a_{03}^2(2-a_1^2) + 2a_{03}(1 - a_1^2 - a_{21}) + a_{12}^2 - 2a_{12}a_1 - 2a_{21}$ şi fie $\Delta_1 = 0$. Exprimăm a_{21} din $\Delta_1 = 0$ şi c din $F_{22} = 0$. Sistemul de ecuaţii $\{F_{40} = 0, F_{31} = 0, F_{04} = 0\}$ are soluţii reale dacă şi numai dacă $a_{03} = (2f+2)/3$ şi $a_{12} = 2b$. În acest caz obţinem că $F_{31} \equiv h_1h_2 = 0$, unde $h_1 = (f+1)a_1 - 2b - p$, $h_2 = (f+1)a_1 + 3b$.

Presupunem că $h_1 = 0$, atunci $a_1 = (2b+p)/(f+1)$. În acest caz părţile drepte ale sistemului cubic (2.1) au factorul comun $(2b+p)x + (f+1)(1-y)$, ceea ce contrazice presupunerii că membrii drepţi ai sistemului (2.1) sunt polinoame reciproc prime.

Fie $h_1 \neq 0$ şi $h_2 = 0$, atunci $a_1 = (-3b)/(f+1)$. În acest caz sistemul de ecuţii algebrice (4.3) nu are soluţii reale.

Presupunem că $\Delta_1 \neq 0$. În acest caz exprimăm p din $F_{22} = 0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{31} şi F_{40} în raport cu c. Obţinem că $Res(F_{31}, F_{40}, c) = \Delta_1 j_1 j_2 j_3$, unde

$j_1 = 3a_{03} - 2f - 2$, $j_2 = (3a_{03}+1)a_1^2 + 2a_{12}a_1 + a_{21} + 1$,

$j_3 = (3a_{03}^2 + 4a_{03})a_1^2 + (2a_{12}a_1 + 4a_{21} + 4)a_{03} - a_{12}^2 + 4a_{12}a_1 + 4a_{21} + 4$.

4.3.1.1. Presupunem că $j_1 = 0$, atunci $a_{03} = (2f+2)/3$ şi $a_{12} = 2b$. În acest caz ecuaţiile $F_{31} = 0$ şi $F_{40} = 0$ au factorul comun $E = a_1 + 2b - c$.

Fie $E = 0$, atunci avem $a_1 = c - 2b$ şi $F_{31} \equiv 0$, $F_{40} \equiv 0$. În acest caz părţile drepte ale sistemului cubic (2.1) au factorul comun $(a_{12} - c)x + y - 1$, ceea ce contrazice presupunerii că membrii drepţi ai sistemului (2.1) sunt polinoame reciproc prime.

Fie $E \neq 0$. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{31} şi F_{40} în raport cu a_{21}. Obţinem că $Res(F_{31}, F_{40}, a_{21}) = r_1r_2r_3r_4r_5$, unde $r_1 = (f+1)a_1 + 3b$, $r_2 = (f+2)a_1 + b$, $r_3 = (3b + a_1 + fa_1)^2 + (2f+5)^2 \neq 0$, $r_4 = (6b + 7a_1 + 4fa_1)^2 + (2f+5)^2 \neq 0$, $r_5 = 2f + 5 \neq 0$.

Dacă $r_1 = 0$, atunci $a_1 = (-3b)/(f+2)$ şi sistemul $\{F_{31} = 0, F_{40} = 0\}$ nu este compatibil.

Dacă $r_2 = 0$, atunci $a_1 = (-b)/(f+2)$ şi sistemul de ecuaţii $\{F_{31} = 0, F_{40} = 0\}$ este compatibil dacă şi numai dacă

$$a_{21} = [(2f+5)b^2 - (f+2)^2]/(f+2)^2.$$

În acest caz sistemul (4.3) ne implică $a_2 = c - 2b$, iar părţile drepte ale sistemului cubic (2.1) au factorul comun $(2b - c)x + y - 1$, ceea ce contrazice presupunerii.

4.3.1.2. Presupunem că $j_1 \neq 0$ şi fie $j_2 = 0$. Atunci $a_{21} = -(a_1^2 + 1 + 2a_{12}a_1 + 3a_{03}a_1^2)$ şi $F_{31} \equiv s_1s_2s_3 = 0$, unde $s_1 = (3a_{03} + 2)a_1 + a_{12}$, $s_2 = (6a_{03}^2 - 4fa_{03} - 2f - 2)a_1 + 4a_{03}a_{12} - ca_{03} - 2fa_{12} - 2a_{12}$, $s_3 = (2a_{03}a_1 + a_{12} + a_1)^2 + (a_{03} + 1)^2 \neq 0$.

4.3.1.2.1. Dacă $s_1 = 0$, atunci $a_{12} = -(3a_{03} + 2)a_1$ şi $F_{31} \equiv 0$, $F_{40} \equiv 0$. Pentru a determina a doua dreaptă invariantă vom considera sistemul (4.3).

Când $a_{03} = (-2)/3$, ecuaţiile sistemului (4.3) au soluţiile $a_2 = -a_1$ şi $a_1^2 = 3$. În acest caz părţile drepte ale sistemului cubic (2.1) au factorul comun $cx + (f+1)y + 1$, ceea ce contrazice presupunerii că membrii drepţi ai sistemului (2.1) sunt polinoame reciproc prime.

Când $3a_{03} + 2 \neq 0$, exprimăm c din ecuaţia $F_3 = 0$ şi obţinem

$F_2 \equiv 2a_1^3(6a_{03}^2 + 11a_{03} + 5) - 3a_1^2a_2a03(a_{03} + 1) - 2a_1(6a_{03} + 5) + a_2(9a_{03}^2 + 15a_{03} + 4)$

$F_4 \equiv 3a_1^2(7a_{03}^2 + 13a_{03} + 6) - 2a_1a_2(6a_{03}^2 + 3a_{03} - 2) - 2a_2^2a_{03} + 3(3a_{03}^2 + 5a_{03} + 2)$.

Notăm $a_1 = uh$ şi $a_2 = vh$. Dacă $v = [2(6a_{03} + 5)u]/(3a_{03})$, atunci $a_{03} = (-5)/6$ şi $h^2u^2 = 3$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(1) $a = (3f+8)/5$, $b = [p(6f+11)]/5$, $c = [2p(-2f-7)]/5$, $d = [2(f+1)]/5$, $g = [p(2f-3)]/5$, $k = [p(-4f-9)]/5$, $l = -b$, $m = f+2$, $n = (-2f-7)/5$, $q = [p(-2f+3)]/5$, $r = -(f+1)$, $s = 0$, $4p^2 - 3 = 0$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$1 - y = 0, \;\; 1 - 2px - y = 0$$

şi a unei cubice invariante

$$6(x^2 + y^2) - 6px^3 + 3x^2y - 6pxy^2 - 5y^3 = 0.$$

Fie $v \neq [2(6a_{03} + 5)u]/(3a_{03})$, atunci exprimăm h^2 din ecuaţia $F_2 = 0$ şi obţinem $F_4 \equiv q_1q_2q_3 = 0$, unde $q_1 = 6a_{03}u + 5u + v$, $q_2 = 3a_{03}u - 3a_{03}v + 3u - v$, $q_3 = 3a_{03}^2u - 3a_{03}^2v + 12a_{03}u - 4a_{03}v + 8u$.

Dacă $q_1 = 0$, atunci $v = -(6a_{03} + 5)u$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(2) $a = (3fa_{03} + 4a_{03} + 2f + 2)/a_{03}$, $b = [(a_{03} - f - 1)(3a_{03} + 2)hu]/a_{03}$, $c = [-2(3a_{03}^2 + fa_{03} + 3a_{03} + f + 1)hu]/a_{03}$, $d = [2(6a_{03}^2 - fa_{03} + 4a_{03} - f - 1)]/a_{03}$, $g = [-(3a_{03}^2 + 5fa_{03} + 7a_{03} + 4f + 4)hu]/a_{03}$, $k = [-(18fa_{03}^2 + 21a_{03}^2 + 29fa_{03} + 31a_{03} + 12f + 12)hu]/a_{03}$, $l = -b$, $m = (36fa_{03}^2 + 30a_{03}^2 + 55fa_{03} + 51a_{03} + 20f + 20)/a_{03}$, $n = (18fa_{03}^2 + 24a_{03}^2 + 17fa_{03} + 21a_{03} + 2f + 2)/a03$, $p = -(6fa_{03} + 3a_{03} + 5f + 3)hu$, $q = [-(36fa_{03}^2 + 33a_{03}^2 + 61fa_{03} + 59a_{03} + 26f + 26)hu]/a_{03}$, $r = -(f + 1)$, $s = [3(6a_{03} + 5)(3a_{03} + 2)(f + 1)]/a_{03}$, $a_1 = hu$, $a_2 = -(6a_{03} + 5)hu$, $h^2u^2 = 3$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$1 + hux - y = 0, \;\; 1 - hu(6a_{03} + 5)x - y = 0$$

şi a unei cubice invariante

$$x^2 + y^2 - (3a_{03} + 2)hux^3 + (9a_{03} + 8)x^2y - (3a_{03} + 2)huxy^2 + a_{03}y^3 = 0.$$

Dacă $q_1 \neq 0$, iar $q_2 = 0$, atunci $u = [v(3a_{03} + 1)]/[3(a_{03} + 1)]$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(3) $a = [-(54a_{03}^3 - 27fa_{03}^2 + 36a_{03}^2 - 33fa_{03} - 14a_{03} - 10f - 10)]/[(9a_{03} + 5)a_{03}]$, $b = [(3a_{03} + 2)(3a_{03} + 1)(a_{03} - f - 1)hv]/[3(a_{03} + 1)a_{03}]$, $c = [-2((9a_{03}^2 - 3fa_{03} - 2)a_{03} + f + 1)hv]/[3(a_{03} + 1)a_{03}]$, $d = [-2(9fa_{03}^2 + 6a_{03}^2 + 14fa_{03} + 13a_{03} + 5f + 5)]/[(9a_{03} + 5)a_{03}]$, $g = [(81a_{03}^4 - 27fa_{03}^3 + 225a_{03}^3 - 96fa_{03}^2 + 117a_{03}^2 - 81fa_{03} - 27a_{03} - 20f - 20)hv]/[3(9a_{03} + 5)(a_{03} + 1)a_{03}]$, $k = [-(243a_{03}^4 - 135fa_{03}^3 + 261a_{03}^3 - 210fa_{03}^2 + 9a_{03}^2 - 111fa_{03} - 69a_{03} - 20f - 20)hv]/[3(9a_{03} + 5)(a_{03} + 1)a_{03}]$, $l = -b$, $m = (162a_{03}^4 - 81fa_{03}^3 + 195a_{03}^3 - 130fa_{03}^2 + 24a_{03}^2 - 69fa_{03} - 41a_{03} - 12f - 12)/[(9a_{03} + 5)(a_{03} + 1)a_{03}]$, $n = (27fa_{03}^2 + 21a_{03}^2 + 31fa_{03} + 27a_{03} + 10f + 10)/[(9a_{03} + 5)a_{03}]$, $p = [(27a_{03}^2 - 9fa_{03} + 12a_{03} - 5f - 3)hv]/[3(a_{03} + 1)]$, $q = [-(243a_{03}^4 - 81fa_{03}^3 + 333a_{03}^3 - 114fa_{03}^2 + 135a_{03}^2 - 63fa_{03} - 9a_{03} - 14f - 14)hv]/[3(9a_{03} + 5)(a_{03} + 1)a_{03}]$, $r = -(f + 1)$, $s = [-3(18a_{03}^2 - 9fa_{03} + 3a_{03} - 5f - 5)(3a_{03} + 2)(3a_{03} + 1))/[(9a_{03} + 5)^2a_{03}]$, $(9a_{03} + 5)h^2v^2 + 9(a_{03} + 1) = 0$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$1 + hux - y = 0, \quad (3a_{03} + 1)hvx + 3(a_{03} + 1)(1 - y) = 0$$

şi a unei cubice invariante

$3(9a_{03}^2 + 14a_{03} + 5)(x^2 + y^2) + 3x^3hv(9a_{03}^3 + 18a_{03}^2 + 11a_{03} + 2) - 3x^2y(27a_{03}^3 + 54a_{03}^2 + 35a_{03} + 8) - xy^2hv(81a_{03}^3 + 126a_{03}^2 + 63a_{03} + 10) + 3y^3a_{03}(9a_{03}^2 + 14a_{03} + 5) = 0.$

Dacă $q_1q_2 \neq 0$, iar $q_3 = 0$, atunci $u = [a_{03}v(3a_{03} + 4)]/(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(4) $a = [-(5a_{03}^3 - 27fa_{03}^2 + 90a_{03}^2 - 42fa_{03} + 46a_{03} - 16f + 8)]/[(9a_{03} + 8)a_{03}]$, $b = [(a_{03} - f - 1)(3a_{03} + 4)(3a_{03} + 2)hv]/(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)$, $c = [-2(9a_{03}^3 - 3fa_{03}^2 + 9a_{03}^2 - 3fa_{03} - 5a_{03} - 4)hv]/(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)$, $d = [-2(9fa_{03}^2 + 42a_{03}^2 + 17fa_{03} + 73a_{03} + 8f + 32)]/[(9a_{03} + 8)a_{03}]$, $g = [(27a_{03}^2 - 9fa_{03} + 39a_{03} - 8f + 12)hv]/(9a_{03} + 8)$, $k = [-(243a_{03}^5 - 135fa_{03}^4 + 1017a_{03}^4 - 552fa_{03}^3 + 1620a_{03}^3 - 816fa_{03}^2 + 1248a_{03}^2 - 528fa_{03} + 464a_{03} - 128f + 64)hv]/[(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)(9a_{03} + 8)a_{03}]$, $l = -b$, $m = (162a_{03}^4 - 81fa_{03}^3 + 447a_{03}^3 - 208fa_{03}^2 + 432a_{03}^2 - 176fa_{03} + 160a_{03} - 48f + 16)/[(9a_{03} + 8)a_{03}^2]$, $n = (27fa_{03}^3 + 93a_{03}^3 + 82fa_{03}^2 + 234a_{03}^2 + 88fa_{03} + 208a_{03} + 32f + 64)/[(9a_{03} + 8)a_{03}^2]$, $p = [(27a_{03}^2 - 9fa_{03} + 39a_{03} - 8f + 12)a_{03}hv]/(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)$, $q = [-(81a_{03}^3 - 27fa_{03}^2 + 183a_{03}^2 - 50fa_{03} + 126a_{03} - 24f + 24)hv]/[(9a_{03} + 8)a_{03}]$, $r = -(f + 1)$, $s = [-(18a_{03}^2 - 9fa_{03} + 21a_{03} - 8f + 4)(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)(3a_{03} + 4)(3a_{03} + 2)]/[(9a_{03} + 8)^2a_{03}^3]$, $(9a_{03} + 8)a_{03}^3v^2h^2 + (3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)^2 = 0$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$1 + hvx - y = 0, \quad hva_{03}(3a_{03} + 4)x + (3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)(1 - y) = 0$$

şi a unei cubice invariante

$a_{03}(9a_{03} + 8)(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)(x^2 + y^2 + a_{03}y^3) + hva_{03}(3a_{03} + 4)(3a_{03} + 2)(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)x^3 - (27a_{03}^3 + 108a_{03}^2 + 128a_{03} + 48)(3a_{03}^2 + 12a_{03} + 8)x^2y - hva_{03}^2(3a_{03} + 4)(3a_{03} + 2)(9a_{03} + 8)xy^2 = 0.$

4.3.1.2.2. Presupunem că $s_1 \neq 0$ şi fie

$$s_2 \equiv (6a_{03}^2 - 4fa_{03} - 2f - 2)a_1 + 4a_{03}a_{12} - ca_{03} - 2fa_{12} - 2a_{12} = 0.$$

Dacă $f = (3a_{03}^2 - 1)/(2a_{03} + 1)$, atunci $s_2 = 0$ şi $F_{04} = 0$ implică $a_{12} = [c(2a_{03} + 1)]/(2a_{03})$ şi $a_{03} = c/(2b - c)$. În acest caz $F_{40} \equiv 0$, $F_{31} \equiv 0$, iar ecuaţiile sistemului (4.3) au soluţiile

$a_2 = -[2(b + c)a_1 + 4b^2 - c^2]/(2b + 2c)$,

$a_1^2 = [2(2b + c)^2(b + c)(c - 2b)a_1 - 16b^5 + 8b^3(c^2 - 1) - 12b^2c - bc^4 + 4c^3]/[8(2b + c)(b + c)^2$.

Astfel, obţinem următorul set de condiţii

(5) $a = (4b^3 - bc^2 + 4b + 4c)/(4b + 4c)$, $d = [b(2b + c)^2(2b - c) - 8b(b + c)]/[2(2b + c)(b + c)]$, $f = [3c^2 - (2b - c)^2]/(4b^2 - c^2)$, $g = [(3b^2(2b + c)^2 + 4(b + c)^2)(2b - c)^2]/[16(b + c)^3]$,

$k=[(2b-c)^2(b(2b+c)^2(b-2c)+4(b+c)^2)]/[16(b+c)^3]$, $l=-b$, $m=(c^2-4b^2)/4$, $n=[-(4b+c)((2b+c)^2(2b-c)b+2c(b+c))]/[2(2b+c)^2(b+c)]$, $p=-b-c$, $s=[-b(2b-c)^2((2b+c)^2(2b-c)b+4(b+c)^2)]/[16(b+c)^3]$, $r=-f-1$, $q=[((14b^2+7bc+2c^2)(2b+c)^2(2b-c)b+4(12b^2+4bc+c^2)(b+c)^2)(c-2b)]/[16(2b+c)(b+c)^3]$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$1+a_1x-y=0,\ \ [4b^2-c^2+2(b+c)a_1]x+2(b+c)(y-1)=0,$$

unde a_1 este soluţie a ecuaţiei

$$(2b+c)(b+c)(4(b+c)a_1^2+2(4b^2-c^2)a_1)+(2b-c)(b(2b+c)(4b^2-c^2)+4(b+c)^2)=0$$

şi o cubică invariantă

$$8(2b+c)(2b-c)(b+c)^3(x^2+y^2)+(b(4b^2-c^2)x+2c(b+c)y)[(b(2b+c)(4b^2-c^2)+4(b+c)^2)(2b-c)x^2+2(2b+c)^2(2b-c)(b+c)xy+4(2b+c)(b+c)^2y^2]=0.$$

Dacă $f\neq(3a_{03}^2-1)/(2a_{03}+1)$, atunci ecuaţia $s_2=0$ are soluţia

$$a_1=[a_{03}(c-4a_{12})+2(f+1)a_{12})/[2(3a_{03}^2-2fa_{03}-f-1)].$$

A doua dreaptă o găsim din sistemul (4.3) şi obţinem următorul set de condiţii

(6) $b=[(f+1-a_{03})a_{12}]/a_{03}$, $d=(2f-2a-3-3(3a_{03}+1)a_1^2-6a_{12}a_1-3a_{03})/2$, $g=[3(2a_{03}+1)a_1^3+3a_{12}a_1^2+3a_1-3a_{12}+2b+2c]/2$, $l=-b$, $n=(f+2)a_1^2+(b-c-p)a_1-d-1$, $q=-a_1^3+ca_1^2+(d-m-a+2)a_1-g$, $r=-f-1$, $s=a_1(aa_1-a_1+g-k)$, $a=[(10f+3+2a_{12}^2+(14f+5)a_1^2+2(c+p)a_1+2(4fa_1-2a_1-c)a_{12})a_{03}+2(3(f+1)a_1+p)a_{12}-(21a_{03}^3a_1^2+9a_{03}^3+14a_{03}^2a_{12}a_1-12a_{03}^2a_1^2f+16a_{03}^2a_1^2-6fa_{03}^2+10a_{03}^2-2a_{12}^2-4fa_1^2-4a_1^2-4f-4)]/[2(a_{03}+1)a_{03}]$, $k=[a_{03}^2(2(c-p+2b+a_{12}^2a_1+(5f+2)a_1+(7f+4)a_1^3+(c-2p+3b)a_1^2)-(2(c+p-b)a_1-((4f-5)a_1^2-3))a_{12})+2(b-p-fa_{12}^2a_1+2(a_1^2+1)(f+1)a_1+(b-p)a_1^2-(f+1-ba_1)a_{12})a_{03}-(2(a_1^2+1+a_{12}a_1)(f+1)a_{12}+3(5a_1^2+3)a_{03}^4a_1)+(2(b+c)+3(2f-3)a_1+(12f-7)a_1^3+4(b-p)a_1^2-(11a_1^2+3)a_{12})a_{03}^3]/[2a_{03}^2(a_{03}+1)]$, $m=[3a_{03}^4(2a_1^2+1)+a_{03}^3(4a_{12}a_1-4fa_1^2+3a_1^2-(b-c-p)a_1-2f+3)+a_{03}^2(-a_{12}^2-2fa_{12}a_1+a_{12}a_1+(p-b+c)a_{12}-4fa_1^2-2a_1^2-ba_1-3f-1)+a_{03}(fa_{12}^2-fa_{12}a_1-a_{12}a_1-a_{12}b-(f+1)(a_1^2+1))+a_{12}^2(f+1)]/[a_{03}^2(a_{03}+1)]$, $p=[a_{03}(3(a_1^2+1)c-a_{12}^3-2(f+1)a_1^3-(2(f+3)a_1-c)a_{12}^2+2(2f-3+ca_1-2(f+3)a_1^2)a_{12})+9a_{03}^4a_1^3-a_{12}^3-(f+3)a_{12}^2a_1-2(a_1^2-f)a_{12}+3((2a_1^2+1)c-2(f-1)a_1^3+(a_1^2-2)a_{12})a_{03}^3+(2(4a_1^2+3)c-a_{12}^2a_1-(7f+3)a_1^3+(2(f-6+2ca_1)-(6f+11)a_1^2)a_{12})a_{03}^2]/[2a_{03}(3a_1^2+2+2a_{12}a_1)+(a_{12}+2a_1)a_{12}+2(a_1^2+1)+(5a_1^2+2)a_{03}^2]$, $a_1=[a_{03}(c-4a_{12})+2(f+1)a_{12})/[2(3a_{03}^2-2fa_{03}-f-1)]$, $a_2=(p+c-b-a_1(f+2))/(f+2)$, $(a-1)(b-c-p)+(f+2)(k-g)=0$, $a_1^2+(a_2+a_1)(a_2-c)+a-d+m-2=0$

pentru existenţa a două drepte invariante $1 + a_1x - y = 0,\ 1 + a_2x - y = 0$ şi a unei cubice invariante

$x^2 + y^2 + ((2a_{03}a_1^2 + a_{12}a_1 + a_1^2 + 1)x^2 - (a_{03}a_1 + a_{12})xy - a_{03}y^2)(a_1x - y) = 0.$

4.3.1.3. Presupunem că $j_1j_2 \neq 0$ şi fie $j_3 = 0$. Atunci

$a_{21} = [a_1^2a_{03}(-3a_{03} - 4) - 2a_1a_{12}(a_{03} + 2) - 4a_{03} + a_{12}^2 - 4]/[4(a_{03} + 1)]$

şi $F_{31} \equiv w_1w_2w_3 = 0$, unde $w_1 = (3a_{03} + 2)a_1 + a_{12}$, $w_2 = (3a_{03} - 2f)a_1a_{03} + (5a_{12} - 2c)a_{03} - 2(f + 1)a_{12}$, $w_3 = (a_{03}a_1 + a_{12})^2 + 4(a_{03} + 1)^2 \neq 0$.

Fie $w_1 = 0$, atunci $j_2 = 0$, ceea ce contrazice ipotezei cazului examinat.

Presupunem că $w_1 \neq 0$ şi fie $w_2 = 0$. Dacă $a_{03} = (2f)/3$, atunci ecuaţia $w_2 = 0$ are soluţia $c = ((2f - 3)a_{12})/(2f)$ şi $F_{31} \equiv 0$, $F_{40} \equiv 0$. Ecuaţiile sistemului (4.3) au soluţiile

$a_2 = [-((f + 3)a_{12} + f(f + 2)a_1)]/[f(f + 2)]$,

$a_1^2 = [-4f(f + 2)(f + 3)a_{12}a_1 + 12(2f + 3)(f + 2)^2 - f^2a_{12}^2]/[4f^2(f + 2)^2]$.

Aşa cum $p = (-3a_{12})/2$, atunci $a_{12} = (-2p)/3$ şi obţinem următorul set de condiţii

(7) $a = (9f + p^2 + 18)/[9(f + 2)]$, $b = [p(-f - 3)]/(3f)$, $c = [p(3 - 2f)]/(3f)$, $d = (-63f^2 + 2fp^2 - 207f - 162)/[9f(f + 2)]$, $g = [p(54f^3 - f^2p^2 + 297f^2 + 540f + 324)]/[27f(f+2)^3]$, $k = [p(p^2(f^2+10f+12)+27(2f+3)(f+2)^2)]/[27f(f+2)^3]$, $l = -b$, $m = -(18f^3+f^2p^2+81f^2+3fp^2+117f+54)/[3f^2(f+2)]$, $n = (36f^3-f^2p^2+162f^2+234f + 108)/[3f^2(f + 2)]$, $q = [-p(f + 1)(27(2f + 3)(f + 2)^2 - f^2p^2)]/[9f^2(f + 2)^3]$, $r = -f - 1$, $s = [p^2(27(2f + 3)(f + 2)^2 - f^2p^2)]/[81f^2(f + 2)^3]$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$1 + a_1x - y = 0,\quad [2p(f + 3) - 3f(f + 2)a_1]x + 3f(f + 2)(1 - y) = 0,$$

unde a_1 sunt soluţiile ecuaţiei

$a_1^2 = [-4f(f + 2)(f + 3)a_{12}a_1 + 12(2f + 3)(f + 2)^2 - f^2a_{12}^2]/[4f^2(f + 2)^2]$

şi a unei cubice invariante $81f(f + 2)^3(x^2 + y^2) + 2(3fy + 6y - px)[(f^2p^2 - 54f^3 - 297f^2 - 540f - 324)x^2 - 6fp(f + 3)(f + 2)xy + 9f^2(f + 2)^2y^2] = 0$.

Dacă $a_{03} \neq (2f)/3$, atunci $a_1 = [(5a_{12} - 2c)a_{03} - 2(f + 1)a_{12}]/[(2f - 3a_{03})a_{03}]$ şi $F_{40} \equiv 0$, $F_{31} \equiv 0$. A doua dreaptă invariantă poate fi găsită din sistemul (4.3). În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(8) $a = [a_{03}(4(10f + 3 + 2fa_1^2 + 2(c + p)a_1) + (15a_{12} + 8fa_1 - 12a_1 - 8c)a_{12}) + 4(2((f + 1)a_1 + p)a_{12} + 4(f + 1) - (f - 1)a_{12}^2) - (21a_{03}a_1^2 + 36a_{03} + 14a_{12}a_1 - 12fa_1^2 + 16a_1^2 - 24f + 40)a_{03}^2]/[8a_{03}(a_{03} + 1)]$, $b = [(f + 1 - a_{03})a_{12}]/a_{03}$, $d = [3a_{03}^2(-3a_1^2 - 4) - 6a_{03}a_{12}a_1 +$

$4_{a03}(2f - 2a - 3a_1^2 - 6) + 3a_{12}^2 - 12a_{12}a_1 - 4(2a - 2f + 3)]/(8a_{03} + 8)$, $g = [-3a_{03}^2a_1^3 + 6a_{03}a_{12}(-a_1^2 - 2) + 4a_{03}(3a_1 + 2b + 2c) - 3a_{12}^2a_1 - 12a_{12} + 4(3a_1 + 2b + 2c)]/(8a_{03} + 8)$, $k = [-3a_{03}^3a_1^3 + 2a_{03}^2(4aa_1 - 2a_{12}a_1^2 - 10a_{12} + pa_1^2 + 2a_1 + 4c) + a_{03}(8aa_1 + a_{12}^2a_1 + 4pa_{12}a_1 + 8fa_{12} - 20a_{12} + 4a_1 + 8c - 8p) + 2(a_{12}^3 + pa_{12}^2 + 4fa_{12} - 4p)]/[8a_{03}(a_{03} + 1)]$, $l = -b$, $m = [2a_{03}^2(4(f - 2) + a_{12}a_1 - (f + 11)a_1^2 + 4(c + p)a_1) + 2(4(f + 1 + pa_{12}) - (f - 3)a_{12}^2) - 3(3a_1^2 + 4)a_{03}^3 - 8a(a_{03} + 1)a_{03} + (11a_{12}^2 - 8a_1^2 + 16f + 4 + 8(c + p)a_1 - 4((f + 2)a_1 - 2p)a_{12})a_{03}]/[8a_{03}(a_{03} + 1))$, $n = (f + 2)a_1^2 + (b - c - p)a_1 - d - 1$, $p = (-6a_{03}a_{12} + 3ca_{03} + 2fa_{12})/2$, $q = -a_1^3 + ca_1^2 + (d - m - a + 2)a_1 - g$, $r = -f - 1$, $s = a_1(aa_1 - a_1 + g - k)$, $a_1 = [(5a_{12} - 2c)a_{03} - 2(f + 1)a_{12}]/[(2f - 3a_{03})a_{03}]$, $a_2 = (p - b + c - (f + 2)a_1)/(f + 2)$, $(a - 1)(b - c - p) + (f + 2)(k - g) = 0$, $a_1^2 + (a_2 + a_1)a_2 - (a_1 + a_2)c + a - d + m - 2 = 0$

pentru existenţa a două drepte invariante $1 + a_1x - y = 0,\ \ 1 + a_2x - y = 0$ şi a unei cubice invariante $4(a_{03} + 1)(x^2 + y^2) + (a_1x - y)[(4 - a_{03}^2a_1^2 - 2a_{03}a_{12}a_1 + 4a_{03} - a_{12}^2)x^2 - 4(a_{03}a_1 + a_{12})(a_{03} + 1)xy - 4a_{03}(a_{03} + 1)y^2] = 0$.

4.3.2. Presupunem că $g_1 \neq 0$ şi fie $g_2 = 0$. În acest caz avem $a_{12} = -3a_{03}a_1$, iar ecuaţiile $F_{40} = 0, F_{31} = 0$ din (4.7) au soluţia comună $a_{21} = 3a_{03}a_1^2$. În acest caz obţinem $e_1 = 0$, ceea ce contrazice cu presupunerea că $e_1 \neq 0$.

Astfel, a fost demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 4.3. *Sistemul cubic* (2.1) *posedă două drepte invariante de forma* (4.1) *şi o cubică invariantă ireductibilă de forma* (4.4) *de poziţie generică, când* $e_1a_{03}(a_{03} + 1) \neq 0$ *şi* $e_2 = 0$, *dacă şi numai dacă se realizează unul din seturile de condiţii* (1) – (8).

4.4. Condiţii de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante de poziţie generică, cazul $e_3 = 0$ şi $a_{03}e_1e_2 \neq 0$

În această secţiune, pentru sistemul cubic (2.1) vom determina condiţiile de existenţă a două drepte invariante de forma (4.1) şi a unei cubice invariante de forma (4.4) când $e_3 = 0$ (vezi (4.9)). Cu acest scop, se studiază compatibilitatea sistemului $\{(4.3), (4.6), (4.7), (4.8)\}$ în raport cu $a_1, a_2, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}$, când $a_{03}(a_{03} + 1)(a_1 - a_2)e_1e_2 \neq 0$.

Din ecuaţiile sistemului (4.8) găsim $c_{10} = 2a - a_{21}$, $c_{01} = a_{12} - 2b$, $d = (3a_{21} - 3a_{03} - 2a + 2f)/2$, $g = (3a_{30} - 3a_{12} + 2b + 2c)/2$, iar ecuaţia $e_3 = 0$ ne implică $p = [(a_1f + a_1 + b)a_{03} - (f + 1)a_{12}]/a_{03}$.

Exprimăm c_{02}, c_{11}, c_{20} din ecuaţiile $F_{05} = 0$, $F_{14} = 0$, $F_{23} = 0$ ale sistemului (4.6). Calculăm rezultanta polinoamelor F_{32} şi F_{41} în raport cu m şi obţinem că $Res(F_{32}, F_{41}, m) = a_{03}^2 f_1 f_2$, unde $f_1 = 3a_{03}(a_{30} - a_{12}) + 2a_{03}(aa_1 - a_1 + b + c - k) - 2a_{30}(f + 1)$, $f_2 = 4a_{21}^2 a_{03} + a_{21}(6a_{03}^2 a_1^2 + 7a_{03}a_{12}a_1 - a_{12}^2) - 3a_{30}a_{03}(3a_{03}a_1 + a_{12}) - 2a_{12}^2 a_1(a_{03}a_1 + a_{12})$.

4.4.1. Admitem că $f_1 = 0$ şi exprimăm k din $f_1 = 0$. Atunci avem $F_{32} \equiv g_1 g_2 = 0$, unde $g_1 = a_{21}(2+2f-3a_{03})+a_{03}(2a+3a_{03}+2a_1^2-2ca_1-2f+2m-2)$, $g_2 = a_{03}a_{12}a_1-2a_{03}a_{21}+a_{12}^2$.

Fie $g_1 = 0$ şi exprimăm m din $g_1 = 0$. În acest caz $F_{32} \equiv 0$, $F_{41} \equiv 0$ şi $F_{50} \equiv 0$. Reducem ecuaţiile sistemului (4.7) după b din $F_{04} = 0$ şi exprimăm a din $F_{13} = 0$.

Notăm $E = 2a_{21}(a_{03} + 1) - 3a_{03}^2 - 4a_{03} - a_{12}^2 + 2a_{12}a_1 - a_1^2 - 1$ şi fie $E = 0$.

4.4.1.1. Ecuaţia $E = 0$ are soluţia $a_{21} = (3a_{03}^2 + 4a_{03} + a_{12}^2 - 2a_{12}a_1 + a_1^2 + 1)/[2(a_{03} + 1)]$. În acest caz avem $F_{22} \equiv h_1 h_2 = 0$, unde $h_1 = 3a_{03} - 2f - 2$ şi $h_2 = 6a_{30}(a_{03} + 1)^2 + a_1^3 - 3a_1^2 a_{12} + a_1(a_{03}^2 + 2a_{03} + 3a_{12}^2 + 1) - a_{12}(7a_{03}^2 + 14a_{03} + a_{12}^2 + 7)$.

Presupunem că $h_1 = 0$ şi fie $a_1 = c - a_{12}$. Atunci $F_{22} \equiv 0$, $F_{31} \equiv 0$ şi $F_{40} \equiv 0$. În acest caz părţile drepte ale sistemului cubic (2.1) au factorul comun $a_{12}x - cx + y - 1$. Aceasta contrazice presupunerii că membrii drepţi ai sistemului (2.1) sunt polinoame reciproc prime.

Presupunem că $h_1 = 0$ şi fie $a_1 \neq c - a_{12}$. În acest caz avem $F_{22} \equiv 0$, iar sistemul de ecuaţii $\{F_{31} = 0, F_{40} = 0\}$ nu are soluţii reale.

Presupunem că $h_1 \neq 0$ şi fie $h_2 = 0$. Atunci exprimăm a_{30} din $h_2 = 0$ şi $F_{22} \equiv 0$. În acest caz sistemul de ecuaţii $\{F_{31} = 0, F_{40} = 0\}$ nu are soluţii reale.

4.4.1.2. Fie $E \neq 0$ şi exprimăm c din $F_{22} = 0$. Ecuaţiile $F_{31} = 0, F_{40} = 0$ au factorul comun $D = 3a_{03} - 2f - 2$. Dacă $D = 0$, atunci $a_{03} = (2f + 2)/3$ şi $F_{31} \equiv 0, F_{40} \equiv 0$. În acest caz părţile drepte ale sistemului cubic (2.1) au factorul comun $a_1 x - y + 1$, ceea ce contrazice presupunerii că membrii drepţi ai sistemului (2.1) sunt polinoame reciproc prime.

Presupunem că $D \neq 0$ şi calculăm rezultanta polinomelor F_{31} şi F_{40} în raport cu a_1. Obţinem că $Res(F_{31}, F_{40}, a_1) = 4(a_{03} + 1)^3 j_1 j_2 j_3^2$, unde $j_1 = 3a_{03}^3 - 8a_{03}^2 a_{21} + a_{03}^2 + 9a_{03}a_{12}^2 - 18a_{03}a_{12}a_{30} + 7a_{03}a_{21}^2 - 2a_{03}a_{21} + 9a_{03}a_{30}^2 + 9a_{12}^2 - 18a_{12}a_{30} - 2a_{21}^3 + a_{21}^2 + 9a_{30}^2$, $j_2 = 81a_{03}^2 a_{21} + 81a_{03}^2 - 27a_{03}a_{12}^2 + 54a_{03}a_{12}a_{30} - 18a_{03}a_{21}^2 + 126a_{03}a_{21} - 27a_{03}a_{30}^2 + 144a_{03} - 27a_{12}^2 + 54a_{12}a_{30} + a_{21}^3 - 15a_{21}^2 + 48a_{21} - 27a_{30}^2 + 64$, $j_3 = (a_{03} - a_{21})^2 + (a_{30} - a_{12})^2 \neq 0$.

Presupunem că $j_1 = 0$. Această ecuaţie admite următoarea parametrizare

$$a_{30} = [(a_{03} + 1)(t^2 + 9) + 2a_{12}t^3]/(2t^3),\ a_{21} = (3a_{03}t^2 + 9a_{03} + t^2 + 9)/(2t^2).$$

În acest caz avem $F_{40} \equiv t^4(3a_{03}^2 + 6a_{03} - 4a_{12}^2 + 8a_{12}a_1 - 4a_1^2 + 3) - t(17t^2 + 9)(a_{03} + 1)(a_{12} - a_1) + 9(t^2 - 6)(a_{03} + 1)^2 = 0$, $F_{31} \equiv t^2(21a_{03}^2 + 42a_{03} - 4a_{12}^2 + 8a_{12}a_1 - 4a_1^2 + 21) +$

$t(5t^2-3)(a_{03}+1)(a_{12}-a_1)+81(a_{03}+1)^2=0.$

Examinăm ecuaţia $F_{40}-t^2F_{31}=0$ care are soluţia $a_1=[(5t^2+9)a_{12}t+18(t^2+3)+18(t^2+3)a_{03}]/[(5t^2+9)t]$, atunci $F_{40}\equiv F_{31}\equiv 25t^4+18t^2-135=0.$

A doua dreaptă invariantă o determinăm din sistemul (4.3). Dacă $f=-2$, atunci exprimăm a_2 din $F_2=0$ şi a_{12} din $F_3=0$. Obţinem următorul set de condiţii

(1) $a=[-(15a_{03}t^2-9a_{03}+8t^2)(a_{03}+1)]/(4a_{03}t^2)$, $b=[-(3a_{03}+2)(a_{03}+1)(5t^2+9)]/(12a_{03}t)$, $c=(75a_{03}^2t^4+486a_{03}^2t^2+891a_{03}^2-25a_{03}t^4+126a_{03}t^2+567a_{03}-50t^4-180t^2-162)/[12(5t^2+9)a_{03}t)$, $d=(9a_{03}^2t^2+9a_{03}^2+9a_{03}t^2+9a_{03}+4t^2)/(2a_{03}t^2)$, $f=-2$, $g=(261a_{03}^2t^4+1134a_{03}^2t^2+729a_{03}^2-150a_{03}t^6-279a_{03}t^4+648a_{03}t^2+729a_{03}-100t^6-360t^4-324t^2)/[12(5t^2+9)a_{03}t^3]$, $k=[-(((3a_{03}+2)(5t^2+9)^2+216(a_{03}+1)(t^2+3))(15a_{03}t^2-9a_{03}+8t^2)+4(3a_{03}+2(25t^4-81)(t^2+3))(a_{03}+1)]/[48(5t^2+9)a_{03}t^3]$, $m=[-(225a_{03}^2t^4+810a_{03}^2t^2+2025a_{03}^2+300a_{03}t^4+1152a_{03}t^2+2916a_{03}+100t^4+432t^2+972)]/(144a_{03}t^2)$, $p=[-(75a_{03}t^4+378a_{03}t^2+567a_{03}+50t^4+288t^2+486)]/[6(5t^2+9)t]$, $l=-b$, $n=[-(9a_{03}^2t^2+9a_{03}^2+11a_{03}t^2+9a_{03}+4t^2)]/(2a_{03}t^2)$, $q=[9a_{03}^3(125t^6+735t^4+999t^2-891)+3a_{03}^2(775t^6+4209t^4+3213t^2-11421)+12a_{03}(175t^6+804t^4+27t^2-3402)+4(175t^6+729t^4-243t^2-3645)]/[48a_{03}(5t^2+9)t^3]$, $r=1$, $s=[-((3a_{03}+2)(5t^2+9)^2+216(a_{03}+1)(t^2+3))(15a_{03}t^4+33a_{03}t^2+54a_{03}+10t^4+24t^2+54)]/[144(5t^2+9)a_{03}t^4]$, $a_1=[(3a_{03}+2)(5t^2+9)^2+216(a_{03}+1)(t^2+3)]/[12(5t^2+9)t]$, $a_2=[-((3a_{03}+2)(5t^2+9)t^2+6(a_{03}+1)(t^2+9))]/[3(15a_{03}^2t^2-9a_{03}^2+27a_{03}t^2-9a_{03}+8t^2)t]$, $F_4\equiv 243(a_{03}+4)(5t^2-3)^3a_{03}^4+32(25t^4-12t^2+27)(t^2+9)t^2+27(25t^6+1393t^4-1521t^2+567)(5t^2-3)a_{03}^3+36(175t^8+3701t^6-5779t^4+3735t^2-1296)a_{03}^2+12(325t^8+3914t^6-4512t^4+3510t^2-1701)a_{03}$, $F_{31}\equiv 25t^2-24\sqrt{6}+9=0$

pentru existenţa a două drepte invariante $1+a_1x-y=0$, $1+a_2x-y=0$ şi a unei cubice invariante $12(x^2+y^2)t^3+3((18(ty+x)x+5(x^2+y^2)t^4)x+2(3x^2+2y^2)t^3y+(11x^2+9y^2)t^2x)a_{03}+2(3(t^3y+9ty+9x)x+5(x^2+y^2)t^4+3(4x^2+3y^2)t^2)x=0.$

Dacă $f\neq-2$, atunci exprimăm a_2 din $F_3=0$ şi a_{12} din $F_2=0$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(2) $a=[t^2(8f+8-15a_{03}^2+12fa_{03}+a_{03})+9a_{03}(a_{03}+1)]/(4t^2a_{03})$, $b=[a_{12}(f+1-a_{03})]/a_{03}$, $c=[25t^4(a_{03}+1)(2f+2-3a_{03})+120t^3a_{03}a_{12}+18t^2(a_{03}+1)(10f+10-3a_{03})+216ta_{03}a_{12}+81(a_{03}+1)(5a_{03}+2f+2)]/[12ta_{03}(5t^2+9)]$, $d=[t^2(9a_{03}^2-4fa_{03}+a_{03}-4f-4)+9a_{03}(a_{03}+1)]/(2t^2a_{03})$, $g=[4t^3((f+1-a_{03})a_{12}+ca_{03})+3a_{03}(a_{03}+1)(t^2+9)]/(4t^3a_{03})$,

$k = [t^3(8(f+1)a_1 - 15a_{03}^2 a_1 + a_{03}(4c - 4a_{12} + 12fa_1 - 3a_1)) + 9ta_{03}a_1(a_{03}+1) + (3a_{03} - 2f - 2)(a_{03}+1)(t^2+9)]/(4t^3 a_{03})$, $m = [t^2(9a_{03}^2 - 2a_{03}a_1^2 + 2ca_{03}a_1 - 7fa_{03} - 5f - 5) + 9(a_{03} - f - 1)(a_{03}+1)]/(2t^2 a_{03})$, $p = (f+1)a_1 - a_{12}$, $l = -b$, $n = (f+2)a_1^2 + (b - c - p)a_1 - d - 1$, $q = (d - a - m + 2)a_1 - a_1^3 + ca_1^2 - g$, $r = -(f+1)$, $s = a_1((a-1)a_1 + g - k)$, $a_1 = [(5t^2+9)a_{12}t + 18(t^2+3) + 18(t^2+3)a_{03}]/[(5t^2+9)t]$, $a_2 = [12t(a_{03} - f - 1)a_{12} - (3a_{03} - 2f - 2)(a_{03}+1)(5t^2+9)]/[12t(f+2)a_{03}]$, $a_{12} = [5(15a_{03}^2 - 12fa_{03} + 3a_{03} - 8f - 8)(3a_{03} - 2f - 2)t^4 + 6t^2(45a_{03}^3 - 84fa_{03}^2 - 39a_{03}^2 + 40f^2 a_{03} + 18fa_{03} - 22a_{03} + 24(f+1)^2) + 27a_{03}(8f^2 + 30f + 22 - 9a_{03}^2 + 6fa_{03} - 3a_{03})]/[12t^3(8(f+1)^2 - 27(f+1)a_{03} + 15a_{03}^2) + 108ta_{03}(f + 1 - a_{03})]$, $F_4 \equiv 4(f+1)^4(131t^2 - 45) - 40(f+1)^3(79t^2 - 105)a_{03} + 75(f+1)^2(101t^2 - 155)a_{03}^2 - 2250(f+1)(3t^2 - 5)a_{03}^3 + 675(3t^2 - 5)a_{03}^4$, $F_{31} \equiv 25t^2 - 24\sqrt{6} + 9 = 0$

pentru existenţa a două drepte invariante $1 + a_1 x - y = 0$, $1 + a_2 x - y = 0$ şi a unei cubice invariante $2t^3(x^2+y^2) + ((t^2+9)(a_{03}+1) + 2a_{12}t^3)x^3 + t(3a_{03}t^2 + 9a_{03} + t^2 + 9)x^2 y + 2a_{12}t^3 xy^2 + 2a_{03}t^3 y^3 = 0$.

Presupunem că $j_1 \neq 0$ şi fie $j_2 = 0$. Ecuaţia $j_2 = 0$ admite parametrizarea

$$a_{30} = [a_{12}t^3 - 9(a_{03}+1)(t^2 - 3)]/t^3, \; a_{21} = (27a_{03} - t^2 + 27)/t^2.$$

În acest caz ecuaţiile $F_{31} = 0$ şi $F_{40} = 0$ au factorul comun $G = 9a_{03} - a_{12}t + a_1 t + 9$.

Fie $G = 0$, atunci $a_1 = (a_{12}t - 9 - 9a_{03})/t$ şi $F_{31} \equiv 0$, $F_{40} \equiv 0$. A doua dreaptă invariantă o găsim din sistemul (4.3). Admitem că $t^2 = 3$, atunci $F_2 \equiv (a_{12} + 2a_2 + 3a_{03}a_2)(f+1) = 0$. Dacă $f = -1$, atunci $a_2 = (a_{12}t + 9 + 9a_{03})/t$ şi obţinem următorul set de condiţii

(3) $a = 1$, $c = -2b$, $f = -1$, $g = -b$, $k = -b$, $l = -b$, $m = (16b^2 - 3d^2 + 4d + 4)/16$, $n = -m$, $p = b$, $q = b$, $r = s = 0$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$(4b\sqrt{3} + 3d + 6)x + 4\sqrt{3}(y - 1) = 0, \;\; (4b\sqrt{3} - 3d - 6)x + 4\sqrt{3}(y - 1) = 0$$

şi a unei cubice invariante $12(x^2 + y^2) - 12bx^3 + 3(3d + 2)x^2 y - 12bxy^2 + (d - 10)y^3 = 0$.

Fie $f \neq -1$. Atunci ecuaţiile $F_2 = 0$, $F_4 = 0$ au soluţia comună $a_{12} = -(3a_{03} + 2)a_2$, $a_2 = 3/t$. În acest caz obţinem următorul set de condiţii

(4) $a = [(3f+4)a_{03} + 2f + 2)/a_{03}$, $b = [3(a_{03} - f - 1)(3a_{03} + 2)]/(a_{03}t)$, $c = [-6(3a_{03}^2 + fa_{03} + 3a_{03} + f + 1)]/(a_{03}t)$, $d = [2(6a_{03}^2 - a_{03}f + 4a_{03} - f - 1))/a_{03}$, $g = [-3(3a_{03}^2 + 5a_{03}f + 7a_{03} + 4f + 4)]/(a_{03}t)$, $l = [3(f + 1 - a_{03})(3a_{03} + 2)]/(a_{03}t)$, $k = [-3((18f + 21)a_{03}^2 + (29f + 31)a_{03} + 12f + 12)]/(a_{03}t)$, $m = [(36f + 30)a_{03}^2 + (55f + 51)a_{03} + 20(f + 1)]/a_{03}$, $n = [(18f + 24)a_{03}^2 + (17f + 21)a_{03} + 2f + 2]/a_{03}$, $p = [-3(6a_{03}f + 3a_{03} + 5f + 3)]/t$,

$q=[-3(36fa_{03}^2+33a_{03}^2+61a_{03}f+59a_{03}+26f+26)]/(a_{03}t)$, $r=-f-1$, $s=[3(6a_{03}+5)(3a_{03}+2)(f+1)]/a_{03}$, $t^2=3$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$3x+t(1-y)=0,\ \ 3(6a_{03}+5)x+t(y-1)=0$$

şi a unei cubice invariante $t(x^2+y^2)-3(3a_{03}+2)(x^2+y^2)x+t(9a_{03}+8)x^2y+a_{03}ty^3=0$.

Presupunem că $t^2\neq 3$. În acest caz $f\neq -1$ şi exprimăm a_{12} din $F_2=0$.

Fie $t^2=5/3$, atunci $F_3=0$ are soluţia $a_{03}=-2(f+1)/3$. În acest caz avem

$$F_4\equiv(ta_2-13)(ta_2-5)=0.$$

Dacă $a_2=5/t$, atunci obţinem următorul set de condiţii

(5) $a=(3f+11)/5$, $b=-(17f+4)/t$, $c=(38f+31)/(5t)$, $d=(27-74f)/5$, $g=(29-83f)/(5t)$, $k=(192f^2+23f+253)/(25t)$, $l=(17f+4)/t$, $m=-(4992f^2-3967f-827)/125$, $n=-(192f^2+289f-10)/5$, $p=(64f^2+23f-15)/(5t)$, $q=(4992f^2-2627f+128)/(25t)$, $r=-(f+1)$, $s=[9(7-64f)(f+2)]/25$, $t^2=5/3$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$5x+t(1-y)=0,\ \ (64f-7)x+5t(1-y)=0$$

şi a unei cubice invariante

$$15t(x^2+y^2)+30(f+2)x^3+6t(11-27f)x^2y+6(17f+4)xy^2-10t(f+1)y^3=0.$$

Dacă $a_2=13/t$, atunci avem următorul set de condiţii

(6) $a=(3f+11)/5$, $b=(5(-5f-4))/t$, $c=(14f+19)/t$, $d=(27-74f)/5$, $g=[13(1-7f)]/(5t)$, $k=(48f^2+59f+121)/(5t)$, $l=[5(5f+4)]/t$, $m=(-96f^2+487f+275)/5$, $n=(-624f^2-1369f-422)/5$, $p=(16f^2+11f-3)/t$, $q=[13(96f^2-11f-16)]/(5t)$, $r=-(f+1)$, $s=[117(-16f^2-37f-10)]/25$, $t^2=5/3$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$13x+t(1-y)=0,\ \ (16f+5)x+t(1-y)=0$$

şi a unei cubice invariante

$$15t(x^2+y^2)+78(f+2)x^3+6t(11-27f)x^2y+30(5f+4)xy^2-10t(f+1)y^3=0.$$

Fie $(t^2-3)(3t^2-5)\neq 0$. Exprimăm a_2 din $F_3=0$ şi obţinem că $F_4\equiv i_1i_2=0$, unde

$$i_1=(3a_{03}-f-1)^2t^2-9(3a_{03}+f+1)(a_{03}-f-1),$$

$$i_2=(3a_{03}-4f-4)^2t^2+9(8(f+1)-3a_{03})a_{03}.$$

Presupunem că $i_1=0$. Atunci $t^2=[9(3a_{03}+f+1)(a_{03}-f-1)]/(3a_{03}-f-1)^2$ şi determinăm următorul set de condiţii

(7) $a=[9a_{03}^2(3-t^2)+a_{03}(6ft^2-t^2+27)+4t^2(f+1)]/(2t^2a_{03})$, $b=[(f+1-a_{03})a_{12}]/a_{03}$, $c=[2(a_{03}a_{12}t-3fa_{03}-3a_{03}-3f-3)]/(a_{03}t)$, $d=[t^2(3a_{03}^2-2fa_{03}-a_{03}-2f-2)+27a_{03}(a_{03}+1)]/(t^2a_{03})$, $g=[2t^3(b+c)-27t^2(a_{03}+1)+81(a_{03}+1)]/(2t^3)$, $k=-(18aa_{03}^2t^2-2aa_{03}a_{12}t^3+18aa_{03}t^2+9a_{03}^2t^2-81a_{03}^2-6a_{03}ft^2+54fa_{03}+3a_{03}t^2-27a_{03}-6ft^2+54f-6t^2+54)/(2t^3a_{03})$, $l=-b$, $m=[t^2(3a_{03}^2-a_{03}a_1^2+a_{03}a_1c-2fa_{03}-f-1)+27(a_{03}^2-fa_{03}-f-1)]/(t^2a_{03})$, $n=(f+2)a_1^2+(b-c-p)a_1-d-1$, $p=[(fa_1+a_1+b)a_{03}-a_{12}(f+1)]/a_{03}$, $q=-a_1^3+ca_1^2+a_1(d-a-m+2)-g$, $r=-(f+1)$, $s=a_1(aa_1-a_1+g-k)$, $a_{12}=-3(9a_{03}^3-12fa_{03}^2-6a_{03}^2+5f^2a_{03}+4fa_{03}-a_{03}+2(f+1)^2)/[(3a_{03}-f-1)(a_{03}-f-1)t]$, $t^2=[9(3a_{03}+f+1)(a_{03}-f-1)]/(3a_{03}-f-1)^2$, $a_1=(a_{12}t-9-9a_{03})/t$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$(a_{12}t-9-9a_{03})x+t(1-y)=0,\quad 9(a_{03}-f-1)x+t(3a_{03}-f-1)(1-y)=0$$

şi a unei cubice invariante $x^2+y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3=0$, unde

$a_{30}=[t^3a_{12}-9(t^2-3)(a_{03}+1]]/t^3$, $a_{21}=(27a_{03}-t^2+27)/t^2$.

Presupunem că $i_1\neq 0$ şi fie $i_2=0$. Atunci $t^2=[-9(8(f+1)-3a_{03})a_{03}]/(3a_{03}-4f-4)^2$. Vom obţine următorul set de condiţii

(8) $a=[3(3f+4)a_{03}^2-2(f+1)a_{03}+8(f+1)^2]/[(3a_{03}-8f-8)a_{03}]$, $b=[(f+1-a_{03})a_{12}]/a_{03}$, $c=[24(f+1)^2-54a_{03}^3+18a_{03}^2(3f+1)-6a_{03}(4f^2+11f+7)]/[(3a_{03}-4f-4)a_{03}t]$, $d=[t^2(3a_{03}^2-2fa_{03}-a_{03}-2f-2)+27a_{03}(a_{03}+1)]/(t^2a_{03})$, $g=[2t^3(b+c)-27t^2(a_{03}+1)+81(a_{03}+1)]/(2t^3)$, $k=[2t^3a_{03}(aa_1-a_{12}-a_1+c)-9(t^2-3)(a_{03}+1)(3a_{03}-2f-2)]/(2t^3a_{03})$, $l=-b$, $m=[(t^2-27)(2f+2-3a_{03}^2)+a_{03}(27-2at^2-2a_1^2t^2+2a_1ct^2+2ft^2-54f-t^2)]/(2t^2a_{03})$, $n=(f+2)a_1^2+(b-c-p)a_1-d-1$, $p=[(fa_1+a_1+b)a_{03}-a_{12}(f+1)]/a_{03}$, $q=-a_1^3+ca_1^2+a_1(d-a-m+2)-g$, $r=-(f+1)$, $s=a_1(aa_1-a_1+g-k)$, $a_{12}=[3(9a_{03}^2-6(2f+1)a_{03}+8(f+1)^2)]/[t(4f+4-3a_{03})]$, $t^2=[9(3a_{03}-8(f+1))a_{03}]/(3a_{03}-4f-4)^2$, $a_1=(a_{12}t-9-9a_{03})/t$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$(a_{12}t-9-9a_{03})x+t(1-y)=0,$$

$$3[3a_{03}^2-12(f+1)a_{03}+8(f+1)^2]x+ta_{03}(3a_{03}-4f-4)(1-y)=0$$

şi a unei cubice invariante $x^2+y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3=0$, unde

$a_{30}=[t^3a_{12}-9(t^2-3)(a_{03}+1]]/t^3$, $a_{21}=(27a_{03}-t^2+27)/t^2$.

Fie $G\equiv 9a_{03}-a_{12}t+a_1t+9\neq 0$. În acest caz ecuaţiile sistemului (4.7) sunt

$F_{40} \equiv t^6[9(a_{03}+1)^2+2(a_{12}-a_1)^2]+27(a_{03}+1)(a_{12}-a_1)(t^4-10t^2-27)t+243(a_{03}+1)^2(17t^2-36)-54t^4[8(a_{03}+1)^2+(a_{12}-a_1)^2]=0,$

$F_{31} \equiv (a_{03}+1)(a_{12}-a_1)(t^4-162t^2-243)t-9t^4[11(a_{03}+1)^2+2(a_{12}-a_1)^2]+54t^2[24(a_{03}+1)^2+(a_{12}-a_1)^2]-9477(a_{03}+1)^2=0.$

Presupunem că $t^2=3$. Atunci $a_1=(a_{12}t+9+9a_{03})/t$ şi $F_{40}\equiv 0$, $F_{31}\equiv 0$. Pentru găsirea celei de-a doua dreaptă invariantă, vom cerceta compatibilitatea sistemului (4.3). Din acest sistem găsim

$$F_2 \equiv (3a_{03}a_2+2a_2+a_{12})(f+1))=0.$$

Dacă $f=-1$, atunci $a_2=(a_{12}t-9-9a_{03})/t$ şi obţinem setul de condiţii (iii).

Dacă $f\neq -1$ şi $a_{12}=-(3a_{03}+2)a_2$, atunci ecuaţia $F_3=0$ are soluţia $a_2=(-3)/t$. În acest caz avem următorul set de condiţii

(9) $a=[(3f+4)a_{03}+2f+2)/a_{03}$, $b=[3(f+1-a_{03})(3a_{03}+2)]/(a_{03}t)$, $c=[6(3a_{03}^2+fa_{03}+3a_{03}+f+1)]/(a_{03}t)$, $d=[2(6a_{03}^2-a_{03}f+4a_{03}-f-1))/a_{03}$, $g=[3(3a_{03}^2+5a_{03}f+7a_{03}+4f+4)]/(a_{03}t)$, $l=-b$, $k=[3((18f+21)a_{03}^2+(29f+31)a_{03}+12f+12)]/(a_{03}t)$, $m=[(36f+30)a_{03}^2+(55f+51)a_{03}+20(f+1)]/a_{03}$, $n=[(18f+24)a_{03}^2+(17f+21)a_{03}+2f+2]/a_{03}$, $p=[3(6a_{03}f+3a_{03}+5f+3)]/t$, $q=[3(36fa_{03}^2+33a_{03}^2+61a_{03}f+59a_{03}+26f+26)]/(a_{03}t)$, $r=-f-1$, $s=[3(6a_{03}+5)(3a_{03}+2)(f+1)]/a_{03}$, $t^2=3$

pentru existenţa a două drepte invariante

$$3x+t(y-1)=0,\;\; 3(6a_{03}+5)x+t(1-y)=0$$

şi a unei cubice invariante $t(x^2+y^2)+3(3a_{03}+2)(x^2+y^2)x+t(9a_{03}+8)x^2y+a_{03}ty^3=0$.

Presupunem că $t^2\neq 3$ şi fie $t^2=27$. Ecuaţia $F_{40}=0$ are soluţia $a_1=(a_{12}t-3-3a_{03})/t$, iar $F_{31}\neq 0$. Admitem că $(t^2-3)(t^2-27)\neq 0$. Vom considera ecuaţia $9(t^2-3)F_{40}+t^2(t^2-27)F_{31}=0$ care ne implică $a_1=[t(t^2+27)a_{12}-18(t^2-18)(a_{03}+1)]/[t(t^2+27)]$. În acest caz obţinem că $F_{40}\equiv F_{31}\equiv t^4+162t^2-1215\neq 0$.

4.4.2. Admitem că $f_1\neq 0$ şi fie $f_2=0$. Dacă $a_{12}=-3a_{03}a_1$, atunci din ecuaţia $f_2=0$ găsim $a_{21}=3a_{03}a_1^2$. În acest caz $F_{50}\equiv e_1\neq 0$, iar sistemul (4.6) nu este compatibil.

Fie $a_{12}\neq -3a_{03}a_1$. Exprimăm a_{30} din $f_2=0$ şi k din $F_{32}=0$. În acest caz $F_{50}\equiv e_1f_1\neq 0$, iar sistemul (4.6) nu este compatibil.

Astfel, a fost demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 4.4. *Sistemul cubic* (2.1) *posedă două drepte invariante de forma* (4.1) *şi o cubică invariantă ireductibilă de forma* (4.4) *de poziţie generică, când* $e_1e_2a_{03}(a_{03}+1)\neq 0$ *şi* $e_3=0$, *dacă şi numai dacă se realizează unul din seturile de condiţii* (1) – (9).

4.5. Condiţii de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante de poziţie generică, cazul $e_4 = 0$ şi $a_{03}e_1e_2e_3 \neq 0$

În această secţiune, pentru sistemul cubic (2.1) vom determina condiţiile de existenţă a două drepte invariante de forma (4.1) şi a unei cubice invariante de forma (4.4) când $e_4 = 0$ (vezi (4.9)). Cu acest scop, se studiază compatibilitatea sistemului $\{(4.3), (4.6), (4.7), (4.8)\}$ în raport cu $a_1, a_2, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}$, când $a_{03}(a_{03}+1)(a_1-a_2)e_1e_2e_34 \neq 0$.

Din ecuaţiile sistemului (4.8) găsim $c_{10} = 2a - a_{21}$, $c_{01} = a_{12} - 2b$, $d = (3a_{21} - 3a_{03} - 2a + 2f)/2$, $g = (3a_{30} - 3a_{12} + 2b + 2c)/2$, iar ecuaţia $e_4 = 0$ ne implică $a_{12} = -3a_{03}a_1$.

Fie $a_{21} = 3a_{03}a_1^2$. Atunci obţinem $F_{32} \equiv e_2e_3 \neq 0$, iar sistemul (4.6) nu este compatibil.

Presupunem că $a_{21} \neq 3a_{03}a_1^2$. Exprimăm m din ecuaţia $F_{32} = 0$ şi k din ecuaţia $F_{41} = 0$. În acest caz sistemul (4.6) nu este compatibil $F_{50} \equiv e_1e_2e_3 \neq 0$.

4.6. Condiţii de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante de poziţie generică, cazul $a_{03}e_1e_2e_3e_4 \neq 0$

În această secţiune, pentru sistemul cubic (2.1) vom determina condiţiile de existenţă a două drepte invariante de forma (4.1) şi a unei cubice invariante de forma (4.4) când $a_{03}(a_{03} + 1)(a_1 - a_2)e_1e_2e_3e_4 \neq 0$ (vezi (4.9)). Cu acest scop, se studiază compatibilitatea sistemului $\{(4.3), (4.6), (4.7), (4.8)\}$ în raport cu $a_1, a_2, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}$.

Din ecuaţiile sistemului (4.8) găsim $c_{10} = 2a - a_{21}$, $c_{01} = a_{12} - 2b$, $d = (3a_{21} - 3a_{03} - 2a + 2f)/2$, $g = (3a_{30} - 3a_{12} + 2b + 2c)/2$, iar din ecuaţiile $F_{05} = 0$, $F_{14} = 0$, $F_{23} = 0$, $F_{32} = 0$ ale sistemului (4.6) exprimăm c_{02}, c_{11}, c_{20} şi k, respectiv. Calculăm rezultanta polinoamelor F_{50} şi F_{41} în raport cu m şi obţinem $Res(F_{50}, F_{41}, m) = -4a_{03}^3e_1e_2e_3e_4 \neq 0$. În acest caz sistemul de ecuaţii $\{(4.3), (4.6), (4.7), (4.8)\}$ nu este compatibil.

4.7. Centre în sistemele cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică

În această secţiune pentru sistemul cubic (2.1), ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică, vom determina ordinul focarului slab $O(0,0)$, adică ce număr finit de mărimi Lyapunov este necesar să fie nule, încât punctul singular să fie centru.

Lema 4.1. *Următoarele două seturi sunt condiţii suficiente ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul (2.1):*

(i) $a = k = r = 0,\ d = f = -1,\ g = (3c - b)/3,\ l = -b,\ m = [2(-bc - 2)]/3,\ n = bc + 2,\ p = (2b)/3,\ q = b,\ s = -bc - 2,\ b^2 = 3;$

(ii) $a = b^2 + 1,\ c = r = 0,\ d = 2(b^2 - 1),\ f = -1,\ g = b(3b^2 + 1),\ k = b(b^2 + 1),\ l = -b,\ m = -b^2,\ n = -4b^2,\ p = -b,\ q = b(-7b^2 - 3),\ s = b^2(-2b^2 - 1).$

Demonstraţie. În cazul (i), sistemul (2.1) are factor integrant Darboux de forma $\mu = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\beta}$, unde $l_{1,2} = (3c - b \pm \sqrt{9c^2 + 30bc + 75})x - 6y + 6$, $\Phi = 9(x^2 + y^2) - 8bx^3$, $\alpha_1 = -\alpha_2 - 1$, $\alpha_2 = (5b + 3c - \sqrt{9c^2 + 30bc + 75})/(2\sqrt{9c^2 + 30bc + 75})$, $\beta = (-4)/3$.

În cazul (ii), sistemul (2.1) are integrală primă Darboux de forma

$$(x^2 + y^2 + (2b^3 + b)x^3 + 2b^2x^2y + bxy^2)(bx + 2y - 1)^{-1} = C.$$

□

Lema 4.2. *Următoarele şase seturi sunt condiţii suficiente ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul (2.1):*

(i) $a = [(3v - 1)v]/(3v^2 + 1)$, $b = \sqrt{3}(1 - v^2)/[(3v^2 + 1)(3v + 1)]$, $d = (-15v^3 - 3v^2 - 13v - 1)/[(3v^2 + 1)(3v + 1)]$, $f = (-6v^2 + v - 1)/(3v^2 + 1)$, $g = [33v^2 - 1 + \sqrt{3}(3v^2 + 1)(3v + 1)c]/[\sqrt{3}(3v^2 + 1)(3v + 1)]$, $k = (a - 1)(a_1 + a_2) + g$, $l = -b$, $m = 2 - a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1 + a_2) - a + d$, $n = a_1a_2(-f - 2) - (d + 1)$, $p = (f + 2)(a_1 + a_2) + b - c$, $q = a_1^2a_2 + a_1a_2^2 - ca_1a_2 - g$, $r = -(f + 1)$, $s = a_1a_2(1 - a)$, $a_1 = [3v^2 + 6v - 1 + \sqrt{3}(c - a_2)(3v^2 + 1)]/[\sqrt{3}(3v^2 + 1)]$, $3(3v^2 + 1)(3v + 1)^2(a_2^2 - ca_2) + 6(15v^2 + 1)(v - 1) - \sqrt{3}(3v + 1)((3v^2 + 6v - 1)(3v + 1)a_2 - 3c(3v^2 + 1)(v - 1)) = 0;$

(ii) $a = [(3v + 1)v]/(3v^2 + 1)$, $b = \sqrt{3}(1 - v^2)/[(3v^2 + 1)(3v - 1)]$, $d = (-15v^3 + 3v^2 - 13v + 1)/[(3v^2 + 1)(3v - 1)]$, $f = (-6v^2 - v - 1)/(3v^2 + 1)$, $g = [33v^2 - 1 + \sqrt{3}(3v^2 + 1)(3v - 1)c]/[\sqrt{3}(3v^2 + 1)(3v - 1)]$, $k = (a - 1)(a_1 + a_2) + g$, $l = -b$, $m = 2 - a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1 +$

$a_2)-a+d$, $n = a_1a_2(-f-2)-(d+1)$, $p = (f+2)(a_1+a_2)+b-c$, $q = a_1^2a_2+a_1a_2^2-ca_1a_2-g$, $r = -(f+1)$, $s = a_1a_2(1-a)$, $a_1 = [-3v^2+6v+1)+\sqrt{3}(c-a_2)(3v^2+1)]/[\sqrt{3}(3v^2+1)]$, $3(3v^2+1)(3v-1)^2(a_2^2-ca_2)-6(15v^2+1)(v+1)+\sqrt{3}(3v-1)((3v^2-6v-1)(3v-1)a_2-3c(3v^2+1)(v+1))=0$;

(iii) $a = (2f+3t^2+1)/(2t^2)$, $d = (2f-2t^2+1)/t^2$, $g = [(2ct-4f+1)t^2+2f+1]/(2t^3)$, $k = [(2f+1+3t^2)(ct-2f)]/(2t^3)$, $l = (-f-2)/t$, $m = (-3t^2+4tcf-8f^2-2f-1)/(2t^2)$, $n = [tc(f+2)-2f(f+3)+t^2-1]/t^2$, $p = [tc(f+1)+2f(-f-2)]/t$, $q = [(4f-2tc-1)t^2+2tc(2f+1)-8f^2-6f-1]/2t^3$, $r = -f-1$, $s = [(2f+t^2+1)(ct-2f)]/(2t^4)$, $t = (f+2)/b$;

(iv) $a = (-10fh^2+72fh-5h^2+36h+108t^2)/(72t^2)$, $b = (f+2)(9-h)/(3t)$, $c = (-4fh+36f+5h-36)/(6t)$, $d = (-10fh^2+72fh-5h^2+36h-72t^2)/(36t^2)$, $g = (-2fh^2-h^2+36t^2)(4h-27)/(216t^3)$, $k = [-(86fh^3-1152fh^2+3888fh+43h^3-576h^2-540ht^2+1944h+3888t^2)]/(432t^3)$, $l = -b$, $m = [-(66fh^2-1008fh+3888f+49h^2-612h+108t^2+1944)]/(72t^2)$, $n = (6fh^2-42fh+7h^2-48h+12t^2)/(12t^2)$, $p = (9fh-72f+5h-36)/(6t)$, $q = [-(2fh^2-24fh+h^2-12h+12t^2)(4h-27)]/(72t^3)$, $r = -f-1$, $s = [-(10fh^2-72fh+5h^2-36h-36t^2)(4h-27)h]/(1296t^4)$;

(v) $a = 3c^2+1$, $b = l = 0$, $d = 2(9c^2-2)/3$, $f = (-5)/3$, $g = c(9c^2+1)$, $k = g$, $m = (-2)/3$, $n = (4-45c^2)/9$, $p = -c$, $q = 2c(-9c^2-1)/3$, $r = 2/3$, $s = cg$;

(vi) $a = [(3f+5)^2(f+2)+b^2(3f+4)^2]/[(3f+5)^2(f+2)]$, $c = [b(6f^2+11f+2)]/[(3f+5)(f+2)]$, $d = [2b^2(3f+4)^3-(f+2)(5f+7)(3f+5)^2]/[(f+2)(3f+4)(3f+5)^2]$, $g = b[3b^2(3f+4)^2-(2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)(3f+5)^3]$, $k = -b[b^2(3f+4)^3+(f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)^2(3f+5)^3]$, $l = -b$, $m = -[b^2(3f+4)^2(9f^2+22f+12)+3(f+1)(f+2)^2(2f+3)(3f+5)]/[(f+2)^2(3f+4)^2(3f+5)]$, $n = -[b^2(3f+4)^2(27f^2+80f+60)-2(f+1)(f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)(3f+4)^2(3f+5)^2]$, $p = -[b(9f^2+22f+12)]/[(3f+5)(f+2)]$, $q = -b[b^2(3f+4)^2(27f^2+85f+66)-(f+1)(f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(3f+5)^3(3f+4)(f+2)^2]$, $r = -f-1$, $s = -b^2[b^2(3f+4)^2(9f+14)+(f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)^2(3f+5)^4]$.

Demonstraţie. În cazurile (i) şi (ii) sistemul (2.1) are factor integrant Darboux de forma $\mu = l_2^{-1}\Phi^{-4/3}$, unde:

În cazul (i), $l_2 = 1+a_2x-y$, $\Phi = 3\sqrt{3}(3v+1)(3v^2+1)(x^2+y^2)-8(x+\sqrt{3}vy)^3$.

În cazul (ii), $l_2 = 1+a_2x-y$, $\Phi = 3\sqrt{3}(3v-1)(3v^2+1)(x^2+y^2)-8(x+\sqrt{3}vy)^3$.

În cazul (iii), sistemul (2.1) are integrală primă Darboux de forma $l_1^3\Phi^{-1} = C$, unde $l_1 = bx + (f+2)(y-1)$, $\Phi = 3(f+2)^3(x^2+y^2) + (2f+1)(bx+(f+2)y)^3$.

În cazul (iv), sistemul (2.1) are integrală primă Darboux de forma $l_1^2 l_2\Phi^{-1} = C$, unde $l_1 = hx + 6t(y-1)$, $l_2 = (4h-27)x + 3y(1-y)$, $\Phi = 324t^3(x^2+y^2) - (2f+1)(4hx - 3ty - 27x)(hx+6ty)^2$.

În cazul (v), sistemul (2.1) are integrală primă Darboux de forma $l_1 l_2\Phi^{-1} = C$, unde $l_{1,2} = 3 \pm x\sqrt{3(9c^2+1)} - 3y$, $\Phi = 2(3cx - y)(3cx+2y)^2 + 9(x^2+y^2)$.

În cazul (vi), sistemul (2.1) are integrală primă Darboux de forma $l_1 l_2\Phi^{-1} = C$, unde $l_{1,2} = (9bf^2 + 27bf + 20b \pm \sqrt{\Delta})x + (3f+5)(3f+4)(f+2)(y-1)$, $\Phi = 2(3bfx + 4bx + 3f^2y + 11fy + 10y)(3bfx + 4bx + 3f^2y + 8fy + 5y)^2 + (3f+5)^3(3f+4)(f+2)(x^2+y^2)$, iar $\Delta = (-2f-3)(b^2(3f+4)^2 + (f+2)^2(3f+5)^2)$. □

Lema 4.3. *Următoarele trei seturi sunt condiţii suficiente ca originea sistemului de coordonate să fie centru pentru sistemul (2.1):*

(i) $a = (4b^3 - bc^2 + 4b + 4c)/(4b+4c)$, $d = [b(2b+c)^2(2b-c) - 8b(b+c)]/[2(2b+c)(b+c)]$, $f = [3c^2 - (2b-c)^2]/(4b^2 - c^2)$, $g = [(3b^2(2b+c)^2 + 4(b+c)^2)(2b-c)^2]/[16(b+c)^3]$, $k = [(2b-c)^2(b(2b+c)^2(b-2c) + 4(b+c)^2)]/[16(b+c)^3]$, $l = -b$, $m = (c^2 - 4b^2)/4$, $n = [-(4b+c)((2b+c)^2(2b-c)b + 2c(b+c))]/[2(2b+c)^2(b+c)]$, $p = -b-c$, $s = [-b(2b-c)^2((2b+c)^2(2b-c)b + 4(b+c)^2)]/[16(b+c)^3]$, $r = -f-1$, $q = [((14b^2 + 7bc + 2c^2)(2b+c)^2(2b-c)b + 4(12b^2 + 4bc + c^2)(b+c)^2)(c-2b)]/[16(2b+c)(b+c)^3]$;

(ii) $a = (9f + p^2 + 18)/[9(f+2)]$, $b = [p(-f-3)]/(3f)$, $c = [p(3-2f)]/(3f)$, $d = (-63f^2 + 2fp^2 - 207f - 162)/[9f(f+2)]$, $g = [p(54f^3 - f^2p^2 + 297f^2 + 540f + 324)]/[27f(f+2)^3]$, $k = [p(p^2(f^2 + 10f + 12) + 27(2f+3)(f+2)^2)]/[27f(f+2)^3]$, $l = -b$, $m = -(18f^3 + f^2p^2 + 81f^2 + 3fp^2 + 117f + 54)/[3f^2(f+2)]$, $n = (36f^3 - f^2p^2 + 162f^2 + 234f + 108)/[3f^2(f+2)]$, $q = [-p(f+1)(27(2f+3)(f+2)^2 - f^2p^2)]/[9f^2(f+2)^3]$, $r = -f-1$, $s = [p^2(27(2f+3)(f+2)^2 - f^2p^2)]/[81f^2(f+2)^3]$;

(iii) $a = 1$, $c = -2b$, $f = -1$, $g = -b$, $k = -b$, $l = -b$, $m = (16b^2 - 3d^2 + 4d + 4)/16$, $n = -m$, $p = b$, $q = b$, $r = s = 0$.

Demonstraţie. În cazul (i), sistemul (2.1) are factor integrant de forma $\mu = \frac{1}{\Phi^2}$, unde

$\Phi = 8(2b+c)(2b-c)(b+c)^3(x^2+y^2) + (b(4b^2-c^2)x + 2c(b+c)y)[(b(2b+c)(4b^2-c^2) + 4(b+c)^2)(2b-c)x^2 + 2(2b+c)^2(2b-c)(b+c)xy + 4(2b+c)(b+c)^2y^2]$.

În cazul (ii), sistemul (2.1) are factor integrant de forma $\mu = \frac{1}{\Phi^{3/2}}$, unde

$\Phi = 81f(f+2)^3(x^2+y^2) + 2(3fy+6y-px)[(f^2p^2-54f^3-297f^2-540f-324)x^2 - 6fp(f+3)(f+2)xy + 9f^2(f+2)^2y^2]$.

În cazul (iii), sistemul (2.1) are factor integrant de forma $\mu = \frac{1}{\Phi^{4/3}}$, unde

$$\Phi = 12(x^2+y^2) - 12bx^3 + 3(3d+2)x^2y - 12bxy^2 + (d-10)y^3 = 0. \qquad \square$$

În continuare vom determina ce număr finit de mărimi Lyapunov sunt necesare să fie nule, încât punctul singular să fie centru.

Teorema 4.5. *Fie sistemul cubic (2.1) are două drepte invariante de forma (4.1) şi o cubică invariantă ireductibilă de forma (4.4), situate în poziţia generică. Atunci punctul singular* $O(0,0)$ *este centru dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează.*

Demonstraţie. Pentru demonstrarea teoremei, vom calcula primele trei mărimi Lyapunov L_1, L_2 şi L_3 în fiecare din seturile de condiţii obţinute în Teoremele 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, după algoritmul descris în lucrarea Cozma [31]. În expresia pentru L_j vom neglija numitorii şi factorii nenuli. Demonstraţia se efectuează în patru etape:

Etapa 1. Să considerăm seturile de condiţii (1)– (28) din Teorema 4.1.

În cazul (1) avem Lema 4.1, (i), iar în cazul (9) avem Lema 4.2, (v) ($f=-1$).

În cazurile (2), (3), (4), (6), (7), (8), (12), (13), (14), (15), (17), (18), (23), (24), (26), (27), (28) obţinem că $L_1 \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (5) rezultanta polinoamelor F_{31} şi L_1 în raport cu a_2 este diferită de zero:

$$Res(F_{31}, L_1, a_2) = 8192(7a_1^4+18a_1^2+27)^4(7a_1^2+4)(a_1^2+1)^2a_1 \neq 0.$$

Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În cazul (10) prima mărime Lyapunov este $L_1 = c$. Dacă $c=0$, atunci avem Lema 4.3, (iii) ($c=0,\ d=10$).

În cazul (11) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 81a_{21}^4 - 6a_{21}^3(5b^2+108) + b^2(b^2+300)a_{21}^2 + 4b^2(24-7b^2)a_{21} - 128b^4$. Ţinând cont că $a_{21}(a_{21}+4) \neq 0$, calculăm rezultanta polinoamelor F_{40} şi L_1 în raport cu b. Obţinem că $Res(F_4, L_1, b) = 0$ dacă şi numai dacă $a_{21} = (-8)/5$. Fie $a_{21} = (-8)/5$, atunci $L_1 \neq 0$. În acest caz punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (16) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 225a^2 - 1630a + 1616$. Dacă $L_1 = 0$, atunci a doua mărime Lyapunov este $L_2 \neq 0$. În acest caz $O(0,0)$ este focar.

În cazul (19) prima mărime Lyapunov este $L_1 = b(b+4)$. Dacă $b=0$, atunci $L_2 \neq 0$. Dacă $b=-4$, atunci $L_2 = 0$ şi avem Lema 4.3, (iii) ($b=-4,\ d=10$).

În cazul (20) prima mărime Lyapunov este $L_1 = b(b-4)$. Dacă $b = 0$, atunci $L_2 \neq 0$. Dacă $b = 4$, atunci $L_2 = 0$ şi avem Lema 4.3, (iii) ($b = 4,\ d = 10$).

În cazul (21) reducem prima mărime Lyapunov cu b^2 din $H = 0$ şi exprimăm b din $L_1 = 0$. Atunci obţinem $H \equiv 186624a_{12}^8 - 6912a_{12}^6 a_{21}(2a_{21}^2 - 5a_{21} + 56) + 32a_{12}^4 a_{21}^2(8a_{21}^4 - 40a_{21}^3 + 831a_{21}^2 - 400a_{21} + 15488) - 48a_{12}^2 a_{21}^3(10a_{21}^4 - 33a_{21}^3 + 456a_{21}^2 + 2176a_{21} + 12288) + 81a_{21}^6(a_{21} + 16)^2 = 0$.

Ţinând cont că $a_{21}(a_{21} + 4)(a_{21} - 8) \neq 0$, calculăm rezultanta polinoamelor H şi e_2 în raport cu a_{12}. Obţinem că $Res(H, e_2, a_{12}) = 0$ dacă şi numai dacă $a_{21}^3 - 8a_{21}^2 - 16a_{21} - 16 = 0$. Fie $a_{21}^3 - 8a_{21}^2 - 16a_{21} - 16 = 0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor L_2 şi H în raport cu a_{12}. Obţinem că $Res(H, L_2, a_{12}) \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În cazurile (22) şi (25) avem Lema 4.3, (iii) şi Lema 4.1 (ii), respectiv.

Etapa 2. Să considerăm seturile de condiţii (1) - (48) din Teorema 4.2.

În cazul (1) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 81v^7 + 270v^6 + 171v^5 - 168v^4 - 199v^3 - 156v^2 - 93v - 18 - av(27v^4 + 99v^3 + 99v^2 + 7v - 12)(3v^2 + 1)$. Fie $L_1 = 0$ şi exprimăm a. Atunci ecuaţia $F_{31} \equiv 54v^6 + 144v^5 + 156v^4 + 129v^3 + 75v^2 + 23v + 3 = 0$ are soluţii reale, dar $L_2 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În cazul (2) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 81v^7 - 270v^6 + 171v^5 + 168v^4 - 199v^3 + 156v^2 - 93v + 18 - av(27v^4 - 99v^3 + 99v^2 - 7v - 12)(3v^2 + 1)$. Fie $L_1 = 0$ şi exprimăm a. Atunci ecuaţia $F_{31} \equiv 54v^6 - 144v^5 + 156v^4 - 129v^3 + 75v^2 - 23v + 3 = 0$ are soluţii reale, dar $L_2 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În cazul (3) obţinem $L_1 = (9a_{03} + 8)(3a_{03} + 4) \neq 0$. Punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În cazul (4) avem Lema 4.2, (i), iar în cazul (7) avem Lema 4.2, (ii).

În cazurile (5) şi (9) prima mărime Lyapunov este $L_1 = u^3 + u^2 - 4u + 20$. Ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale, dar $L_2 \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În cazurile (6) şi (8) prima mărime Lyapunov este $L_1 = u^3 - u^2 - 4u - 20$. Ecuaţia $L_1 = 0$ are soluţii reale, dar $L_2 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În cazurile (10) şi (14) egalitatea cu zero a primei mărimi Lyapunov ne dă $a = (u^7 - u^6 + 4u^5 - 2u^4 + 4u^3 + 8u^2 - 32u + 32)/((u^2 + 2u + 4)(u^2 - 2u + 4)(u - 1)u^2)$. Calculăm L_2 şi obţinem $L_2 = u^4 - 4u^3 + 40u^2 - 72u + 80 \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar.

În cazurile (11) şi (13) egalitatea cu zero a primei mărimi Lyapunov ne dă $a = (u^7 + u^6 + 4u^5 + 2u^4 + 4u^3 - 8u^2 - 32u - 32)/((u^2 + 2u + 4)(u^2 - 2u + 4)(u + 1)u^2)$. Calculăm L_2 şi obţinem $L_2 = u^4 + 4u^3 + 40u^2 + 72u + 80 \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar.

În cazurile (12) şi (15) prima mărime Lyapunov are forma $L_1 = 3v + 1 \neq 0$ şi $L_1 =$

$3v-1\neq 0$, respectiv. Originea sistemului de coordonate este focar.

În cazul (16) prima mărime Lyapunov este $L_1=[3a_{03}^2-(8f+9)a_{03}+4(f+1)^2][27a_{03}^3-9a_{03}^2(6f+5)+2a_{03}(18f^2+33f+16)-8(f+1)^3]\neq 0$. Prin urmare, $O(0,0)$ este focar.

În cazul (17) avem $L_1=5764801t^8-6353046t^6(4f+3)+194481t^4(216f^2+354f+125)-642978t^2(48f^3+130f^2+105f+28)+4251528(2f^2+4f+1)(f+1)^2$. Rezultanta polinoamelor F_{31} şi L_1 în raport cu f este $Res(F_{31},L_1,f)\neq 0$. Prin urmare, $O(0,0)$ este focar.

În cazul (18) avem $L_1=49t^2+45\neq 0$. Punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (19) se calculează prima mărime Lyapunov L_1 şi rezultanta polinoamelor L_1, F_{31} în raport cu f. Obţinem $Res(F_{31},L_1,f)=(28a_{03}+27)^3(9a_{03}+8)(9a_{03}+1)^3(2a_{03}+1)^{10}(a_{03}+1)a_{03}^7\neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (20) calculăm primele două mări Lyapunov L_1 şi L_2. Apoi calculăm rezultanta $E_1=Res(L_1,j_1,h)$ a polinoamelor L_1 şi j_1 în raport cu h, la fel rezultanta $E_2=Res(L_2,j_1,h)$ a polinoamelor L_2 şi j_1 în raport cu h. Polinoamele E_1 şi E_2 au factorul comun $E_{12}=135a_{03}^3-162fa_{03}^2-126a_{03}^2+36f^2a_{03}-24fa_{03}-160a_{03}+8f^3+72f^2+192f+128$. Fie $E_{12}=0$. Ecuaţia $E_{12}=0$ admite parametrizarea

$$f=(3a_{03}-2a_{03}w^2-2)/2,\ a_{03}=(3w+1)/[(w+3)w^2],$$

iar ecuaţia $j_1=0$ are forma $j_1\equiv q_1q_2=0$, unde

$q_1=72w^6h(4h-27)+12w^5h(137h-918)+2w^4(2447h^2-20952h+32076)+6w^3(1331h^2-13500h+32076)+135w^2(53h^2-588h+1620)+648w(5h^2-57h+162)+729(h-6)^2$,

$q_2=12w^3(4h-27)+2w^2(79h-540)+3w(41h-270)+27(h-6)\neq 0$.

Dacă $q_1=0$, atunci $L_1=0$ are soluţii reale, iar $L_2\neq 0$. Prin urmare, $O(0,0)$ este focar.

În cazul (21) calculăm primele două mări Lyapunov L_1 şi L_2. Apoi calculăm rezultanta $U_1=Res(L_1,j_1,f)$ a polinoamelor L_1 şi j_1 în raport cu h, la fel rezultanta $U_2=Res(L_2,j_1,f)$ a polinoamelor L_2 şi j_1 în raport cu f. Polinoamele U_1 şi U_2 au factorul comun $U_{12}=405a_{03}^2h^2-4860a_{03}^2h+14580a_{03}^2+612a_{03}h^2-7560a_{03}h+23328a_{03}+256h^2-3456h+11664$.

Fie $U_{12}=0$. Atunci ecuaţia $U_{12}=0$ admite parametrizarea $a_{03}=[-(v+1)^2(v-1)^2]/(v^2+1)^2$, $h=[54(v^4+4v^3+6v^2-4v+1)]/(7v^4+36v^3+50v^2-36v+7)$, iar ecuaţia $j_2=0$ are forma $j_2\equiv p_1p_2=0$, unde $p_1=f(v^2+1)^2+2v^4-2v^2+2$, $p_2=2f^2(v^2+1)^4+f(7v^4-4v^3+6v^2+4v+7)(v^2+1)^2+2(3v^8-3v^7+11v^6+9v^5+4v^4-9v^3+11v^2+3v+3)$.

Dacă $p_1=0$, atunci avem Lema 4.2, (iv) ($f=[2(v^2-v^4-1))/(v^2+1)^2$, $h=[54(v^4+4v^3+6v^2-4v+1)]/(7v^4+36v^3+50v^2-36v+7)$, $t^2=[81(3v-1)(v+3)(v^2-1)^3]/(7v^4+36v^3+50v^2-36v+7)^2$). Admitem că $p_1\neq 0$ şi fie $p_2=0$. Reducem ecuaţia $L_1=0$ cu f^2

din $p_2 = 0$, apoi exprimăm f din $L_1 = 0$. Ecuaţia $p_2 = 0$ are soluţii reale, dar $L_2 \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (22) calculăm primele două mări Lyapunov L_1 şi L_2. Apoi reducem $L_2 = 0$ cu f^2 din $L_1 = 0$. Exprimăm f din $L_2 = 0$ şi obţinem $L_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, unde $\alpha_1 = u - 2$, $\alpha_2 = u + 2$, $\alpha_3 = 3u^2 - 4$. Fie $L_1 = 0$, atunci sistemul cubic mai posedă două drepte invariante. Problema centrului cu patru drepte invariante a fost rezolvată în lucrarea [26].

Dacă $\alpha_1 = 0$, atunci sistemul cubic posedă dreptele invariante $l_3 = 4 + x - 2y$, $l_4 = 4 - x - 3y$; dacă $\alpha_2 = 0$ – dreptele invariante $l_3 = 4 - x - 2y$, $l_4 = 4 + x - 3y$; dacă $\alpha_3 = 0$ – dreptele invariante $l_3 = 12u - 2x - 9uy$, $l_4 = 4u + 2x - 5uy$.

În cazul (23) prima mărime Lyapunov are forma $L_1 = \beta_1\beta_2$, unde $\beta_1 = f(u^2 + 36) + 54$, $\beta_2 = (f + 1)^2u^2 + 18(2f + 3)(f + 2)$. Dacă $\beta_1 = 0$, atunci avem Lema 4.3, (ii) ($f = (-54)/(u^2 + 36)$, $b = [-(u^2 + 18)(u^2 + 9)u]/[54(u^2 + 36)]$). Dacă $\beta_2 = 0$, atunci avem Lema 4.2, (v) ($b^2 = -[(3f + 5)^2(2f + 3)(f + 2)]/[2(3f + 4)^2]$).

În cazul (24) calculăm primele două mări Lyapunov şi rezultanta lor $Res(L_1, L_2, f) = \gamma_1\gamma_2$, unde $\gamma_1 = 135v^{16} + 918v^{14} + 2583v^{12} + 3910v^{10} + 3521v^8 + 1953v^6 + 666v^4 + 132v^2 + 12 \neq 0$, $\gamma_2 = 3v^6 + 11v^4 + 8v^2 + 2 \neq 0$. Prin urmare, $O(0,0)$ este focar.

În cazul (25) calculăm primele două mări Lyapunov, unde $L_1 = 27a_{03}^3 - 54fa_{03}^2 - 36a_{03}^2 + 36f^2a_{03} + 42fa_{03} + 5a_{03} - 8f^3 - 12f^2 + 4$. Ecuaţia $L_1 = 0$ admite parametrizarea

$$a_{03} = [(u + 1)(u - 2)^2]/(3u - 5),\ f = [(3u^2 - 3u - 4)(u - 3)]/[2(3u - 5)],$$

iar $L_2 \equiv \gamma_1\gamma_2$, unde $\gamma_1 = 3u^2 - 1$, $\gamma_2 = 3u^2 - 6u - 1$.

Dacă $\gamma_1 = 0$ sau $\gamma_2 = 0$, atunci sistemul cubic mai posedă o dreaptă invariantă, iar problema centrului cu trei drepte invariante a fost rezolvată în lucrarea Cozma [31]. Astfel, dacă $\gamma_1 = 0$, sistemul cubic posedă dreapta invariantă $l_3 = 18(3u - 2) + t(6u - 5)(1 + y)$, iar dacă $\gamma_2 = 0$ – drepta invariantă $l_3 = 4tu + t + 2x$.

În cazul (26) prima mărime Lyapunov este $L_1 \neq 0$. Punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (27) avem $L_1 = t^2f_1\delta_1\delta_2$, unde $\delta_1 = 3a_{03} - 2f - 1 \neq 0$, $\delta_2 = 3a_{03} - 2f - 2 \neq 0$, $f_1 = h - 6 \neq 0$. Punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (28) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 0$. Vom exprima aceste condiţii de centru prin coeficienţii sistemului (2.1) examinând două cazuri posibile: $h = 9$ şi $h \neq 9$.

Dacă $h = 9$, atunci $t = 1/c$ şi avem Lema 4.2, (v). Dacă $h \neq 9$, atunci $3f + 5 \neq 0$. Exprimăm h din ecuaţia lui f şi t din ecuaţia lui b, obţinem Lema 4.2, (vi).

În cazul (29) prima mărime Lyapunov este $L_1 \equiv (7h - 54)(4h - 27) \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (30) prima mărime Lyapunov este $L_1 \equiv 15fh - 108f + 23h - 162$. Fie $L_1 = 0$ şi exprimăm f, atunci $K \equiv (5h-36)(4h-27) \neq 0$. Punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (31) calculăm primele trei mărimi Lyapunov L_1, L_2, L_3, unde $L_1 \equiv 3a_{03}^2(4h^3 - 27h^2 - 108ht^2 + 972t^2)(36-5h)h + 4a_{03}[(16h^5 - 216h^4 + 20169h^2t^2 + 26244t^4 - 2916(t^2 + 27)ht^2 - 27(47t^2 - 27)h^3)f + 16h^5 - 216h^4 - 1233h^3t^2 + 729h^3 + 19926h^2t^2 - 3888ht^4 - 78732ht^2 + 34992t^4] + 72(52h^3 - 783h^2 - 972t^2 + 108(t^2+27)h)(f+1)^2t^2$. Din ecuaţiile $F_{31} = 0, F_{13} = 0, L_2 = 0$ exprimăm necunoscutele f, a_{03} şi t^2. Atunci ţinând cont de ecuaţia $s_2 = 0$, stabilim că $L_1 = 0$ are soluţii reale, iar $L_3 \neq 0$. Prin urmare, $O(0,0)$ este focar.

În cazul (32) avem Lema 4.2, (iii).

În cazul (33) găsim $L_1 = f + 1$. Dacă $f = -1$ şi $b = 1/\sqrt{3}$ avem Lema 4.2, (i) ($v = 1/3$, $c = -5b$). Dacă $f = -1$ şi $b = (-1)/\sqrt{3}$ avem Lema 4.2, (ii) ($v = (-1)/3$, $c = -5b$).

În cazul (34) obţinem $L_1 = f(3u^2+1) + 6u^2 - u + 1$. Dacă $L_1 = 0$, atunci Lema 4.2, (i) ($c = [-(39u^3 + 3u^2 + 5u + 1)]/[\sqrt{3}(3u^2+1)(3u+1)u]$, $a_2 = [\sqrt{3}(u-1)]/(3u+1)$, $u = v$).

În cazul (35) avem $L_1 = f(3u^2+1) + 6u^2 + u + 1$. Dacă $L_1 = 0$, atunci Lema 4.2, (ii) ($c = [-(39u^3 - 3u^2 + 5u - 1)]/[\sqrt{3}(3u^2+1)(3u-1)u]$, $a_2 = [-\sqrt{3}(u+1)]/(3u-1)$, $u = v$).

În cazul (36) calculăm primele trei mărimi Lyapunov. Fie $t = 3\sqrt{3}$ şi exprimăm c^2 din $L_1 = 0$, c din $L_2 = 0$. Atunci $L_1 = (84f+181)(84f+125)(28f+37)(21f+40)$.

Dacă $f = (-40)/21$, atunci $L_1 \equiv 0$ şi $L_3 \equiv 0$. În acest caz sistemul cubic posedă trei drepte invariante ($l_3 = 6\sqrt{3} + x + 4\sqrt{3}y$). Dacă $f = (-37)/28$ sau $f = (-125)/74$ sau $f = (-181)/84$, atunci $L_1 \equiv 0$, iar $L_3 \neq 0$. Punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (37) avem $L_1 = 0$, atunci obţinem Lema 4.2, (iii) ($c = -(17t^2 + 11)/[2(t^2+1)t]$, $f = -(4t^2+1)/[2(t^2+1)]$).

În cazul (38) calculăm primele trei mărimi Lyapunov şi exprimăm f din $L_1 = 0$. Atunci $J \equiv 4a_2^3t(t^4 + 7t^2 + 6) + 2a_2^2(25t^4 + 124t^2 + 27) + 3a_2t(67t^2 + 219) + 3(85t^2 + 189)$ este factor comun în L_2 şi L_3. Dacă $J = 0$, atunci $F_{31} \neq 0$. Fie $J \neq 0$ şi calculăm rezultanta polinoamelor F_{31} şi L_2 în raport cu a_2. Obţinem $Res(F_{31}, L_2, a_2) = t^9(t^2+1)^{17}\eta_1\eta_2\eta_3$, unde $\eta_1 = t^2 - 27$, $\eta_2 = 3t^2 - 1$, $\eta_3 = 9t^6 - 477t^4 + 163t^2 - 27$.

Dacă $\eta_1 = 0$, atunci $L_2 \neq 0$. Dacă $\eta_2 = 0$, atunci $t = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$, $a_2 = \frac{\mp\sqrt{3}}{2}$. În acest caz sistemul cubic posedă trei drepte invariante ($l_3 = 2 \mp 3\sqrt{3}x$) şi o cubică invariantă. Problema centrului cu trei drepte invariante a fost rezolvată pentru sistemul cubic în lucrarea Cozma [31].

Dacă $\eta_1\eta_2 \neq 0$, iar $\eta_3 = 0$, atunci $F_{31} \equiv 0$ şi $L_2 \neq 0$. Punctul singular $O(0,0)$ este focar.

În cazul (39) calculăm primele trei mărimi Lyapunov. Fie $t = 9/2$, atunci $L_1 = 50c^2 - 100cf - 325c + 100f^2 + 520f + 687$. Exprimăm f^2 din $L_1 = 0$ şi f din $L_2 = 0$. Atunci $L_1 = (400c^2 - 640c + 181)(10c - 3)(5c - 9)$. Dacă $c = 9/5$ sau $c = 10/3$, atunci $L_1 \equiv 0$ şi $L_3 \equiv 0$. În acest caz sistemul cubic posedă patru drepte invariante.

Când $(10c - 3)(5c - 9) \neq 0$, ecuaţia $400c^2 - 640c + 181 = 0$ are soluţii reale, dar $L_3 \neq 0$.

Fie $t = -9/2$, atunci $L_1 = 50c^2 + 100cf + 325c + 100f^2 + 520f + 687$. Exprimăm f^2 din $L_1 = 0$ şi f din $L_2 = 0$. Atunci $L_1 = (400c^2 + 640c + 181)(10c + 3)(5c + 9)$. Dacă $c = -9/5$ sau $c = -10/3$, atunci $L_1 \equiv 0$ şi $L_3 \equiv 0$, iar sistemul cubic posedă patru drepte invariante. Când $(10c + 3)(5c + 9) \neq 0$, ecuaţia $400c^2 + 640c + 181 = 0$ are soluţii reale, dar $L_3 \neq 0$.

În cazul (40) prima mărime Lyapunov este $L_1 = 0$ şi obţinem Lema 4.2, (iv) ($f = (18 - 7h)/[6(h - 6)]$, $t^2 = (-17h^3 + 513h^2 - 4617h + 13122)/[9(5h - 54)]$.

În cazul (41) avem Lema 4.2, (iv) ($f = (-37h^2 + 522h - 72t^2 - 1944)/[2(11h^2 - 144h + 18t^2 + 486)]$), iar în cazul (42) avem Lema 4.2, (iv).

În cazurile (43) şi (44) avem $L_1 = 4f + 7$. Dacă $L_1 = 0$, atunci părţile drepte ale sistemului cubic au factor comun, ceea ce contrazice ipotezei asupra lui $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$.

În cazul (45) avem $L_1 = 3fh - 18f + 2h$. Dacă $L_1 = 0$, atunci $h = (18f)/(3f + 2)$ şi obţinem condiţiile din Lema 4.3, (ii) ($b^2 = [(2f + 3)(f + 3)^2(f + 2)^2]/(-2f^3)$).

În cazul (46) găsim $L_1 = 3fh - 18f + 7h - 45$. Dacă $L_1 = 0$, atunci $f = (45 - 7h)/[3(h - 6)]$, iar părţile drepte ale sistemului cubic au factorul comun $hx + 6ty - 6t$, ceea ce contrazice ipotezei asupra lui $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$.

În cazul (47) egalitatea cu zero a primei mărimi Lyapunov ne dă $f = (-z^8 - 3z^7 - 14z^6 - 27z^5 - 2z^4 + 27z^3 - 14z^2 + 3z - 1)/[2(z^8 + 2z^7 + 2z^6 + 2z^5 + 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1)]$, iar $L_2 = \nu_1\nu_2$, unde $\nu_1 = z^4 - 2z^3 - 6z^2 + 2z + 1$, $\nu_2 = z^6 + 6z^5 + 9z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 6z - 1$.

Dacă $\nu_1 = 0$, atunci $L_2 \equiv 0$ şi $L_3 \equiv 0$. În acest caz, pe lângă dreptele invariante l_1 şi l_2, sistemul cubic mai posedă o dreaptă invariantă de forma $1 + a_3x = 0$. Problema centrului cu trei drepte invariante a fost rezolvată pentru sistemul cubic în lucrarea Cozma [31].

Fie $\nu_1 \neq 0$ şi $\nu_2 = 0$. În acest caz ecuaţia $\nu_2 = 0$ are soluţii reale şi $L_2 \equiv 0$, iar $L_3 \neq 0$. Prin urmare, originea sistemului de coordonate este focar.

În cazul (48) egalitatea cu zero a primei mărimi Lyapunov ne dă $f = (-z^8 + 3z^7 - 14z^6 + 27z^5 - 2z^4 - 27z^3 - 14z^2 - 3z - 1)/[2(z^8 - 2z^7 + 2z^6 - 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1)]$ şi $L_2 = \sigma_1\sigma_2$, unde $\sigma_1 = z^4 + 2z^3 - 6z^2 - 2z + 1$, $\sigma_2 = z^6 - 6z^5 + 9z^4 + 6z^3 - 9z^2 - 6z - 1$.

Dacă $\sigma_1 = 0$, atunci $L_2 \equiv 0$ şi $L_3 \equiv 0$. În acest caz, pe lângă dreptele invariante l_1 şi l_2, sistemul cubic mai posedă o dreaptă invariantă de forma $1 + a_3x = 0$. Problema centrului cu trei drepte invariante a fost rezolvată pentru sistemul cubic în lucrarea Cozma [31].

Fie $\sigma_1 \neq 0$ şi $\sigma_2 = 0$. În acest caz ecuaţia $\sigma_2 = 0$ are soluţii reale şi $L_2 \equiv 0$, iar $L_3 \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

Etapa 3. Să considerăm seturile de condiţii (1)−(8) din Teorema 4.3.

În cazul (1) prima mărime Lyapunov este $L_1 = f + 1$. Dacă $L_1 = 0$, atunci obţinem Lema 4.3, (iii) $(b = p,\ d = 0,\ p^2 = 3/4)$.

În cazul (2) avem $L_1 = f + 1$. Dacă $L_1 = 0$, atunci aplicăm Lema 4.3, (iii) $(b^2 = (3d^2 - 12d + 12)/16)$.

În cazul (3) găsim $L_1 = 3a_{03}^2 - 2fa_{03} - f - 1$. Dacă $L_1 = 0$, atunci avem Lema 4.3, (i) $(b = [hv(-9a_{03}^2 - 9a_{03} - 2)]/[3(2a_{03} + 1)],\ c = [2a_{03}hv(-9a_{03}^2 - 9a_{03} - 2)]/[3(2a_{03}^2 + 3a_{03} + 1)],\ h^2 = [-9(a_{03} + 1)]/[v^2(9a_{03} + 5)])$.

În cazul (4) mărimea $L_1 = 0$ ne dă $a_{03} = (2f)/3$ şi obţinem condiţiile din Lema 4.3, (ii) $(p = [3fhv(f + 2)(f + 1)]/(f^2 + 6f + 6),\ h^2 = [-3(f^2 + 6f + 6)^2]/[(3f + 4)f^3v^2])$.

În cazul (5) avem Lema 4.3, (i), iar în cazul (7) suntem în condiţiile Lemei 4.3, (ii).

În cazurile (6) şi (8) găsim $L_1 \neq 0$. Punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

Etapa 4. Să considerăm seturile de condiţii (1)–(9) din Teorema 4.4.

În cazul (1) prima mărime Lyapunov este $L_1 = (76\sqrt{6} + 159)(3a_{03} + 2) \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În cazul (2) prima mărime Lyapunov este $L_1 = \alpha_1\alpha_2$, unde $\alpha_1 = f + 1$, $\alpha_2 = \sqrt{6}(2490a_{03}^2 - 3547fa_{03} - 1472a_{03} - 2088f - 2088) + 3(2970a_{03}^2 - 3666fa_{03} - 1191a_{03} - 2114f - 2114)$.

Dacă $\alpha_1 = 0$, atunci ecuaţia $F_4 = 0$ are soluţia $t^2 = 5/3$, iar $F_{31} \neq 0$. Prin urmare, $O(0, 0)$ este focar. Fie $\alpha_1 \neq 0$ şi $\alpha_2 = 0$. Exprimăm f din ecuaţia $\alpha_2 = 0$ şi t^2 din ecuaţia $F_{31} = 0$. În acest caz $F_4 = 0$ nu are soluţii reale. Punctul singular $O(0, 0)$ este focar.

În cazul (3) avem Lema 4.3, (iii).

În cazurile (4)–(9) avem respectiv $L_1 = (3a_{03} - 2f - 2)(3a_{03} + 2)(a_{03} + 1)(f + 1) \neq 0$, $L_1 = (8f + 1)(2f - 1) \neq 0$, $L_1 = (2f + 1)(2f - 1) \neq 0$, $L_1 = (3a_{03}^2 - 2fa_{03} - f - 1)(3a_{03} + 2f + 2)(3a_{03} + f + 1)(3a_{03} - 2f - 2)(a_{03} - f - 1)(a_{03} + 1)(f + 1) \neq 0$, $L_1 = (3a_{03} + 2f + 2)(3a_{03} - 2f - 2)(3a_{03} - 2f)(3a_{03} - 8f - 8)(a_{03} - 2f - 2)(a_{03} + 1)(f + 1) \neq 0$, $L_1 = (3a_{03} - 2f - 2)(3a_{03} + 2)(a_{03} + 1)(f + 1) \neq 0$. Deci în fiecare din aceste cazuri punctul singular $O(0, 0)$ este focar. $\square$

Dacă nu se realizează condiţiile din Teorema 4.5 şi $L_1 = L_2 = 0$, atunci $L_3 \neq 0$. În acest caz $O(0,0)$ este focar slab de multiplicitatea maximală trei şi din origine pot fi bifurcate cel mult trei cicluri limită de amplitudine mică.

Teorema 4.6. *Originea sistemului de coordonate este centru pentru sistemul cubic (2.1), cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică dacă şi numai dacă se realizează cel puţin unul dintre seturile de condiţii din Lemele 4.1–4.3.*

În rezolvarea problemei centrului un rol determinant l-a avut metoda integrabilităţii Darboux ceea ce se confirmă de următoarea teoremă.

Teorema 4.7. *Orice sistem cubic cu puncte singulare de tip centru, două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică, este Darboux integrabil.*

4.8. Concluzii la capitolul 4

Capitolul 4 este dedicat problemei integrabilităţii sistemelor diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică. În el a fost rezolvată problema consecutivităţilor centrice pentru sistemele cubice (2.1) cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică:

– au fost obţinute 93 seturi de condiţii necesare şi suficiente încât sistemul cubic (2.1) să posede două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică;

– s-a demonstrat că ciclicitatea punctului singular $O(0,0)$ în sistemul cubic (2.1) cu două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică este cel mult trei;

– au fost obţinute 11 seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului în sistemul cubic (2.1) cu două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică;

– s-a demonstrat că sistemul cubic (2.1) cu punct singular de tip centru, care are două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică, este integrabil după Darboux.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrările [38], [39], [40], [42], [51], [52].

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

În lucrarea de faţă, pentru sistemele diferenţiale cubice este studiată problema deosebirii punctelor singulare de tip centru şi focar, numită problema centrului. Importanţa acestei probleme rezidă în faptul că ea are tangenţe cu problema locală a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită ce pot apărea la bifurcaţii, problemă nesoluţionată până în prezent.

Problema centrului este echivalentă cu problema integrabilităţii locale a sistemelor diferenţiale polinomiale în vecinătatea punctului singular ce are valorile proprii pur imaginare. Din aceste considerente, a fost studiată şi se dezvoltată metoda algebrică de integrare a sistemelor diferenţiale polinomiale, numită metoda Darboux de integrabilitate. Ea constă în construirea integralei prime sau a factorului integrant din soluţiile algebrice ale sistemului diferenţial polinomial. Darboux a arătat că aceasta este posibil pentru sistemele de gradul n, dacă avem $n(n+1)/2$ curbe algebrice invariante.

Aplicativitatea metodei Darboux în toate cazurile de existenţă a centrului a fost pentru prima dată arătată de către Schlomiuk [114] pentru sistemele pătratice şi de către Cozma [31] pentru sistemele cubice ce posedă două drepte invariante şi o conică invariantă. E firesc să ne întrebăm: cum de rezolvat problema centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale ce posedă un număr de curbe algebrice invariante mai mic decât $n(n+1)/2$, în particular, pentru sistemele cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă.

În teză sunt studiate relaţiile dintre curbele algebrice invariante, mărimile Lyapunov şi integrabilitatea locală, care ne conduc la două probleme fundamentale:

Problema 1. *Să se determine condiţiile de existenţă a două drepte invariante distincte şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemele diferenţiale cubice.*

Problema 2. *Să se determine toate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.*

Problemele formulate au fost complet rezolvate. La realizarea cercetărilor au fost folosite metodele teoriei calitative a sistemelor dinamice, metodele algebrice de calcul computaţional, metodele de parametrizare a curbelor algebrice, metodele de integrabilitate locală. În studiul problemei centrului au fost dezvoltate două mecanisme de bază: metoda de integrabilitate Darboux şi metoda reversibilităţii.

În premieră au fost determinate sistemele diferenţiale cubice cu punct singular de tip centru sau focar care posedă două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă. Pentru aceste clase de sisteme cubice: au fost obţinute condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a centrului; a fost stabilită ciclicitatea punctului singular de tip centru sau focar; a fost demonstrată integrabilitatea Darboux sau reversibilitatea sistemelor cu puncte singulare de tip centru; au fost determinate consecutivităţile centrice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în stabilirea unor relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală, ceea ce a contribuit la dezvoltarea metodei de integrabilitate Darboux, fapt ce a permis determinarea unor noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Aceste rezultate au un rol important la realizarea studiului calitativ al sistemelor diferenţiale cubice şi ne permit să efectuăm următoarele **concluzii generale:**

– sistemele cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă pot avea cel mult trei cicluri limită de amplitudine mică bifurcate dintr-un punct singular de tip centru sau focar, ceea ce reprezintă un rezultat important în studiul problemei ciclicităţii (Cap. 2, 2.2; Cap. 3, 3.4; Cap. 4, 4.7);

– sistemele cubice cu punct singular de tip centru, care au două drepte invariante şi o cubică invariantă, sunt Darboux integrabile în cazurile când aceste soluţii algebrice formează un fascicol de curbe sau ele se află în poziţia generică (Cap. 3, 3.2, 3.4; Cap. 4, 4.7);

– sistemele cubice cu punct singular de tip centru, care au două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă, sunt Darboux integrabile sau reversibile (Cap. 2, 2.3);

– în sistemele cubice, ciclicitatea punctului singular de tip centru sau focar, depinde de poziţia relativă a curbelor algebrice invariante (Cap. 3, 3.1, 3.3; Cap. 4, 4.1 – 4.4.).

Rezultatele, ce ţin de problema centrului, obţinute pentru sistemele diferenţiale cubice reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită. În baza concluziilor prezentate putem **recomanda următoarele:**

– să se studieze problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice care admit soluţii algebrice, a căror sumă a gradelor este egală cu un număr dat;

– să se folosească invarianţii algebrici în studierea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă curbe algebrice invariante;

– rezultatele cercetării pot fi folosite în studiul calitativ al sistemelor diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă, în studiul integrabilităţii unor modele matematice care descriu procese sociale şi naturale.

– rezultatele obţinute în teză pot fi incluse în programele cursurilor opţionale universitare ţinute studenţilor şi masteranzilor la facultăţile cu profil real sau tehnic.

BIBLIOGRAFIE

1. AMEL'KIN, V.V., LUKASHEVICH, N.A., SADOVSKII, A.P. *Non-linear oscillations in the systems of second order.* Minsk: Belarusian University Press, 1982. 208 p.

2. BALTAG, V.A. *Darboux first integrals and new center conditions for a cubic system*: doct. thesis in mathematics. Chişinău, 1984. 147 p.

3. BAUTIN, N.N., LEONTOVICH, E.A. *Methods and ways of qualitative analysis of dynamical systems in the plane.* Moskva: Nauka, 1980. 488 p. ISBN 5–02–014321–9

4. BAUTIN, N.N. On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or centre type. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 1954, vol. 100, pp. 397–413. ISSN 0002–9947.

5. BAUTIN, N.N. On periodic solutions of a system of differential equations. In: *Prikl. Math. i Mech.* 1954, vol. 18, no. 1, pp. 128–140.

6. BONDAR, Y.L., SADOVSKII, A.P. Variety of the center and limit cycles of a cubic system, which is reduced to Lienard form. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica.* 2004, vol. 46, no. 3, pp. 71–90. ISSN 1024–7696.

7. BUJAC, C. *Cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight*: doct. thesis in mathematics. Chişinău, 2016. 165 p.

8. BUJAC, C., LLIBRE, J., VULPE, N. First integrals and phase portraits of planar polynomial differential cubic systems with the maximum number of invariant straight lines. In: *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2016, vol. 15, no. 2, pp. 327–348. ISSN 1575-5460.

9. BOTHMER, H.-C., KRÖKER, J. Focal values of plane cubic systems. In: *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2010, vol. 9, pp. 319–324. ISSN 1575-5460.

10. FERČEC, B., GINÉ, J., YIRONG L., ROMANOVSKI, V.G. Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quartic systems having homogeneous nonlinearities. In: *Acta Applic. Mathematicae.* 2013, vol. 124, no. 1, pp. 107–122. ISSN 0167-8019.

11. CAO, J., LLIBRE, J., ZHANG, X. Darboux integrability and algebraic limit cycles for a class of polynomial differential systems. In: *Science China Mathematics.* 2014, vol. 57, no. 4, pp. 775–794. ISSN 1674–7283.

12. CHAVARRIGA, J., GINÉ, J. Integrability of cubic systems with degenerate infinity. In: *Diff. Equations Dynam. Systems.* 1998, vol. 6, pp. 425–438. ISSN 0971–3514.

13. CHAVARRIGA, J., GIACOMINI, H., GINÉ J. An improvement to Darboux integrability theorem for systems having a center. In: *Appl. Math. Letters.* 1999, vol. 12, pp. 85–89. ISSN 0893–9659.

14. CHAVARRIGA, J., GRAU, M. Some open problems related to 16b Hilbert problem. In: *Scientia Series A: Mathematical Sciences.* 2003, vol. 9, pp. 1–26. ISSN 0036–8679.

15. CHAVARRIGA, J., LLIBRE, J., SOTOMAYOR, J. Algebraic solutions for polynomial systems with e mphasis in the quadratic case. In: *Expo. Math.*1997, vol. 15, pp. 161–173. ISSN 0723–0869.

16. CHERKAS, L.A. Conditions for a center for the equation $yy' = \sum_{i=0}^{3} p_i(x)y^i$. In: *Differ. Equ.* 1978, vol. 14, no. 9, pp. 1594–1600. ISSN 0374–0641.

17. CHERKAS, L.A. On algebraic solutions of the equations $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials of the second degree. In: *Dokl. AN BSSR.* 1963, vol. 7, no. 7, pp. 732–735.

18. CHRISTOPHER, C. Estimating limit cycle bifurcatins from centers. In: *Trends in Mathematics: Diff. Equations with Symbolic Computation.* Birkhäuser Verlag, 2006, pp. 23–35. ISBN 3–7643–7368–7.

19. CHRISTOPHER, C.J., LLOYD, N.G. On the paper of X. Jin and D. Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems. In: *Bull. London Math. Soc.* 1990, vol. 22, no. 1, pp. 5–12. ISSN 0024–6093.

20. CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J. Algebraic aspects of integrability for polynomial systems. In: *Qual. Theory Dyn. Syst.* 1999, vol. 1, pp. 71–95. ISSN 1575-5460.

21. CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J. Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems. In: *Ann. Differ. Equa.* 2000, vol. 16, no. 1, pp. 5–19. ISSN 1002–0942.

22. CHRISTOPHER, C., LI, Chengzhi. *Limit Cycles of Differential Equations. Series: Advanced Courses in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, CRM Barcelona, 2007. 170 p. ISBN 978–3–7643–8410–4.

23. CHRISTOPHER, C. Quadratic systems having a parabola as an integral curve. In: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 1989, vol. 112, pp. 113–134. ISSN 0308–2105.

24. CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J., PANTAZI, C., ZHANG, X. Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems. In: *J. Phys. A.* 2002, vol. 35, no. 10, pp. 2457–2476. ISSN 1751–8113.

25. CIOBANU, M., ROTARU, T. 130 de ani de zbucium pentru soluţionarea problemei lui Poincaré despre centru şi focar. In: *Academos*. 2013, vol. 2, pp. 13–21. ISSN 1857–0461.

26. COZMA, D., ŞUBĂ, A. Partial integrals and the first focal value in the problem of centre. In: *Nonlin. Diff. Equ. and Appl.* 1995, vol. 2, pp. 21–34. ISSN 1021–9722.

27. COZMA, D., ŞUBĂ, A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. In: *Sci. Annals of the "Al.I.Cuza" University, Mathematics*. 1998, vol. XLIV, s.I.a, pp. 517–530. ISSN 1221–8421.

28. COZMA, D. The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant conic. In: *Nonlinear Differ. Equ. and Appl.* 2009, vol. 16, pp. 213–234. ISSN 1021–9722.

29. COZMA, D. The problem of the center for cubic systems with two homogeneous invariant straight lines and one invariant conic. In: *Annals of Differential Equations*. 2010, vol. 26, no. 4, pp. 385–399. ISSN 1002–0942.

30. COZMA, D. Center problem for cubic systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant conic. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2012, no. 1, pp. 32–49. ISSN 1024–7696.

31. COZMA, D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics*. Chişinău: Ştiinţa, 2013. 240 p. ISBN 978–9975–67–906–0.

32. COZMA, D. Darboux integrability and rational reversibility in cubic systems with two invariant straight lines. In: *Electronic Journal of Differential Equations*. 2013, vol. 2013, no. 23, pp. 1–19. ISSN 1072–6691.

33. COZMA, D. *Integrability of cubic differential systems with invariant algebraic curves*: doct. habilitate thesis in mathematics. Chişinău, 2014. 265 p.

34. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for cubic systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic curve. In: *Abstracts of the International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education"*, June 23–26, 2016, Chişinău, pp. 25–26. ISBN 978–9975–71–794–6.

35. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *ROMAI Journal*. 2017, vol. 13, no. 2, pp. 39–54. ISSN 1841–5512.

36. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a cubic differential system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Proceedings of the Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova*, June 28 - July 2, 2017, Chisinau, pp. 269–272. ISBN 978–9975–71–915–5.

37. COZMA, D., **DASCALESCU, A.**, REPEŞCO, V. Center conditions and phase portraits in a cubic differential system with invariant algebraic curves. In: *Abstarcts of the 25 Conference on Applied and Industrial Mathematics*, September 14 – 17, 2017. Iaşi, România, pp. 35–36. http://www.romai.ro

38. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** The problem of the center for a cubic system having two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Abstracts of the XVIII International Scientific Conference on Differential Equations "Erugin's Readings–2018"*, May 15–18, 2018, Grodno, Belarus, pp. 102–103. ISBN 978-985-7160-08-2.

39. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Abstracts of the 26 Conference on Applied and Industrial Mathematics*, September 20 – 23, 2018, Chişinău, Tehnical University of Moldova. pp. 36–37. http://www.romai.ro

40. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Darboux integrability for a class of cubic differential systems with two straight lines and one cubic algebraic solutions. In: *Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov: inter. conf. on Mathematics*, April 19 – 21, 2018, Bălţi, Republic of Moldova, pp. 33.

41. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a class of cubic differential systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2018, vol. 86, no.1, pp. 120–138. ISSN 1024–7696.

42. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for cubic systems with two invariant straight lines and one invariant cubic in generic position. In: Abstracts of the International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education", June 24–26, 2019, Chişinău, pp. 23–24. ISBN 978–9975–149–17–4.

43. DAI, Guoren, WO, Songlin. Closed orbits and straight line invariants in E_3 systems. In: *Acta Mathematica Scientica.* 1989, vol. 9, no. 3, pp. 251–261. ISSN 0252–9602.

44. DARBOUX, G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. In: *Bull. Sci. Math.* 1878, pp. 60–96; pp. 124–144; pp. 152–200.

45. DANILIUK, V., ŞUBĂ, A. Necessary and sufficient center conditions for some cubic systems. In: *Izv. AN MSSR, Ser. fiz.-mat i tehn.* 1989, vol. 3, pp. 57–58.

46. DANILIUK, V., ŞUBĂ, A. The distinguishing between a center and a focus in a cubic system with six parameters. In: *Izv. AN MSSR, Matematika.* 1990, vol. 3, pp. 18–21.

47. **DASCALESCU, A.** Condiţii de integrabilitate pentru un system diferenţial cubic ce posedă o cubică invariantă. In: *Ştiinţe ale naturii şi exacte, ştiinţe juridice şi economice: sesiunea naţională de comunicări ştiinţifice studenţeşti*, 21–22 aprilie 2016, USM. Rezumatele comunicărilor, Chişinău, 2016, pp. 90–92. ISBN 978–9975–71–768–7.

48. **DASCALESCU, A.** Draboux integrability for cubic differential systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Tendinţe contemporane ale dezvoltării stiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, ediţia V a conf. şt. intern. a doctoranzilor*, 25 mai, 2016. Chişinău, pp. 306–311. ISBN 978–9975–993–83–4.

49. **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic differential system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Tendinţe contemporane ale dezvoltării stiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, ediţia VI a conf. şt. intern. a doctoranzilor*, 15 iunie, 2017. Chisinău, pp. 20–25. ISBN 978–9975–108–16–4.

50. **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Modern problems of mathematics and its applications in natural sciences and information technologies: intern. sci. conf.*, September 17-19, 2018. Chernivtsi, Ukraine, pp. 20. http://fmi50.pp.ua

51. **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series.* 2018, vol. 45, no. 2, pp. 271–282. ISSN 1223-6934.

52. **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Bukovinian Math. Journal.* 2018, vol. 6, no. 3–4, pp. 53–62. ISSN 2309–4001.

53. DUKARIC, M., GINÉ, J., Integrability of Lotka–Volterra planar complex cubic systems. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2016, vol. 26, no. 01, 1650002. ISSN 0218–1274.

54. DULAC, H. Détermination et intégration d'une certaine d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre. In: *Bull. Sci. Math.* 1908, vol. 32, no. 2, pp. 230–252.

55. DRUZHKOVA, T.A. *Differential equations with invariant algebraic curves*: doct. thesis in mathematics. Gorky, 1975. 105 p.

56. EVDOKIMENKO, R.M. Investigation in the large of a dynamic system with a given integral curve. In: *Differ. Equ.* 1979, vol. 15, p. 215–221. ISSN 0012–2661.

57. FERČEC, B., MAHDI, A. Center conditions and cyclicity for a family of cubic systems: computer algebra approach. In: *Mathematics and Computers in Simulation.* 2013, vol. 87, pp. 55–67. ISSN 0378–4754.

58. FROMMER, M. Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmheitssellen. In: *Math. Annalen.* 1934, vol. 109, pp. 395–424.

59. GAIKO, V.A. *Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem.* Kluwer Academic Publishers, 2003. 203 p. ISBN 978–1–4419–9168–3.

60. GARCÍA, I. *Contribution of the qualitative study of planar vector fields*: doct. thesis in mathematics. Universitat Autonoma de Barcelona, 2000. 143 p.

61. GINÉ, J., ROMANOVSKI, V.G. Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quintic systems. In: *Nonlinear Analysis "Real World Appl."* 2010, vol. 11, no. 3, pp. 2100–2105. ISSN 1468–1218.

62. GINÉ, J. On some open problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem. In: *Chaos, Solitons and Fractals.* 2007, vol. 31, pp. 1118–1134. ISSN 0960–0779.

63. GINÉ, J., LLIBRE, J., VALLAS, C. The cubic polynomial differential systems with two circles as algebraic limit cycles. In: *Advanced Nonlinear Studies.* 2017, vol. 18, no. 1, pp. 183-–193. ISSN 2169–0375.

64. HILL, J.M., LLOYD, N.G., PEARSON, J.M. Centres and limit cycles for an extended Kukles system. In: *Electronic Journal of Diff. Equations.* 2007, vol. 2007, no. 119, pp. 1–23. ISSN 1072–6691.

65. GARBUZOV, V., TISCHENCO, V. *Symmetry of trajectories in planar quadratic systems.* Grodno: Grodno State University, 1992, vol. I. 95 p.

66. GORIELY, A. *Integrability and nonintegrability of dynamical system.* USA: World Sientific Publishing Co., 2001. 415 p. ISBN 10: 981023533X.

67. HILBERT, D. Mathematische probleme. In: *Nachr. Ges. Wiss., editor, Second Internat. Congress Math.* Paris, 1900, Göttingen Math.–Phys. Kl. 1900, p. 253–297.

68. HAN, M., ROMANOVSKI, V.G. Estimating the number of limit cycles in polynomial systems. In: *J. of Math. Anal. Appl.* 2010, vol. 368, pp. 491–497. ISSN 0022–247X.

69. IL'YASHENKO, Yu.S. *Finiteness theorem for limit cycles.* Transl. Math. Monographs, vol. 94, 1994. 288 p. ISBN 978–0–8218–4553–0.

70. KAPTEYN, W. On the centre of the integral curves which satisfy differential equations of the first order and the first degree. In: *Proceedings of the Section of Science.* Konikl, Akademie von Wetenschappen te Amsterdam, 13,2 (1911), pp. 1241–1252; 14,2 (1911), pp. 1185–1195.

71. KOMPEL, V.G. Sufficient conditions for the center for a two-dimensional autonomous system whose right-hand sides are polynomials of the third degree. In: *Differ. Equ.* 1988, vol. 24, no. 9, pp. 1636–1637. ISSN 0012–2661.

72. KOOIJ, R.E. Cubic systems with four line invariants. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1995, vol. 118, no. 1, pp. 7–19. ISSN 0305-0041.

73. KOOIJ, R.E. Cubic systems with four line invariants, including complex conjugated lines. In: *Diff. Eq. and Dyn. Sys.* 1996, vol. 4, no. 1, pp. 43–56. ISSN 0971–3514.

74. KOOIJ, R.E. Real polynomial systems of degree n with $n+1$ line invariants. In: *J. of Diff. Eqs.* 1995, vol. 116, no. 2, pp. 249–264. ISSN 0022–0396.

75. KOOIJ, R.E, CHRISTOPHER, C.J. Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems. In: *Appl. Math. Lett.* 1993, vol. 6, no. 4, pp. 51–53. ISSN 0893–9659.

76. KUKLES, I.S. On necessary and sufficient center conditions. In: *Dokl. Akad. Nauk.* 1944, vol. 42, pp. 160–163. ISSN 1064–5624.

77. LEVANDOVSKYY, V., PFISTER, G., ROMANOVSKI, V.G. Evaluating cyclicity of cubic systems with algorithms of computational algebra. In: *Communications in Pure and Applied Analysis.* 2012, vol. 11, no. 5, pp. 2023–2035. ISSN 1097–0312.

78. LI, C. Two problems of planar quadratic systems. In: *Scientia Sinica, (Series A).* 1983, vol. 26, pp. 471–481. ISSN 0253–5831.

79. Li, C., LIU, C., YANG, J. A cubic system with thirteen limit cycles. In: *J. Diff. Eqns.* 2009, vol 246, pp. 3609-–3619. ISSN 0022–0396.

80. LJUBIMOVA, R.A. About one differential equation with invariant straight lines. In: *Differ. and Integral Equ.* 1984, Gorky, pp. 66–69.

81. LLOYD, N.G., PEARSON, J.M. Symmetry in planar dynamical systems. In: *J. Symbolic Computation.* 2002, vol. 33, pp. 357–366. ISSN 0747–7171.

82. LLOYD, N.G., PEARSON, J.M., ROMANOVSKI V.G. Computing integrability conditions for a cubic differential system. In: *Comp. Math. Applic.* 1996, vol. 32, no. 10, pp. 99–107. ISSN 0898–1221.

83. LUNKEVICH, V.A., SIBIRSKY, C.S. Integrals of a general quadratic differential system in cases of the center. In: *Differ. Equ.* 1982, vol. 18, pp. 563–568. ISSN 0374–0641.

84. LUNKEVICH, V.A., SIBIRSKY, C.S. Conditions of a centre in homogeneous nonlinearities of third degree. In: *Differ. Equ.* 1965, vol. 1, pp. 1164–1168. ISSN 0374–0641.

85. LYAPUNOV, A.M. *The general problem of the stability of motion.* Gosudarstv. Izdat. Tech. Lit., 1950. 471 p.

86. LYNCH, S. Symbolic computation of Lyapunov quantities and the second part of Hilbert's sixteenth problem. In: Trends in Mathematics "Differential Equations with Symbolic Computation", 2006, p. 1—22.

87. MALKIN, K.E. Conditions for the center for a class of differential equations. In: *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved. Matematika.* 1966, vol. 50, pp. 104–114.

88. MALKIN, K.E. Criteria for the center for a differential equation. In: *Volž. Mat. Sb.* 1964, vol. 2, pp. 87–91.

89. OLIVEIRA, R., REZENDE, A., SCHLOMIUK, D., VULPE, N. Geometric and algebraic classification of quadratic differential systems with invariant hyperbolas. In: *Electronic J. of Differ. Equa.* 2017, vol. 2017, no. 295, pp. 1–122. ISSN 1072–6691.

90. POINCARÉ, H. Mémoire sur les coubes défines par les équations différentielles. In: *J. de Mathématiques.* 1881, vol. 7, pp. 375–422; 1882, vol. 8, pp. 251–296; Oeuvres de Henri Poincaré, 1951, vol. 1, Paris: Gauthier–Villars, pp. 3–84.

91. POPA, M.N., PRICOP, V.V. Applications of algebraic methods in solving the center-focus problem. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica.* 2013, vol. 71, no. 1, pp. 45–71. ISSN 1024–7696.

92. POPA, M.N., PRICOP, V.V. *The center-focus problem: algebraic solutions and hypoteses.* Chişinău, Institute of Mathematics and Informatics, 2018. 256 p. ISBN 978–9975–62–416–9.

93. POPA, M.N., SIBIRSKY, C.S. Conditions for the existence of a homogeneous linear partial integral of a differential system. In: *Differ. Equ.* 1987, vol. 23, no. 8, pp. 1324–1331. ISSN 0374–0641.

94. POPA, M.N., SIBIRSKY, C.S. Conditions for the presence of a nonhomogeneous linear particular integral in a quadratic differential system. In: *Bul. Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 1991, vol. 3, pp. 58–66. ISSN 1024–7696.

95. PUŢUNTICĂ, V. *Studiul calitativ al sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu şase şi cu şapte drepte invariante reale*: tz. de doct. în matematică. Chişinău, 2010. 135 p.

96. PRELLE, M.J., SINGER, M.F. Elementary first integrals of differential equations. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983, vol. 279, pp. 215–229. ISSN 0002–9947.

97. REPEŞCO, V. *Sisteme cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante*: tz. de doct. în matematică. Chişinău, 2013. 134 p.

98. ROMANOVSKI, V.G and SHAFER, D.S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach.* Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009. 348 p. ISBN 978–0–8176–4726–1.

99. ROMANOVSKI, V.G, ŞUBĂ, A.S. Center of some cubic systems. In: *Annals of Differential Equations.* 2001, vol. 17, no. 4, pp. 363–376. ISSN 1002–0942.

100. ROMANOVSKI, V.G. Time-reversibility in 2-dimensional systems. In: *Open Systems & Infor. Dynamics*. 2008, vol. 15, no.4, pp. 359–370. ISSN 1230–1612.

101. ROUSSEAU, C., SCHLOMIUK, D. Cubic vector fields symmetric with respect to a center. In: *J. Diff. Equations.* 1995, vol. 123, no. 2, pp. 388–436. ISSN 0022–0396.

102. ROUSSEAU, C., SCHLOMIUK, D. The centers in the reduced Kukles system. In: *Nonlinearity.* 1995, vol. 8, no. 4, pp. 541–569. ISSN 0951–7715.

103. RYCHKOV, G.S. The limit cycles of the equation $u(x+1)du = (-x + ax^2 + bxu + cu + du^2)dx$. In: *Differ. Equa.* 1972, vol. 8, no. 12, pp. 2257–2259. ISSN 0374–0641.

104. SADOVSKII, A.P. Cubic systems of nonlinear oscillations with seven limit cycles. In: *Differ. Equ.* 2003, vol. 39, no. 4, pp. 505–516. ISSN 0374–0641.

105. SADOVSKII, A.P. *Polynomial ideals and varieties.* Minsk, BGU, 2008. 199 p. ISBN 978–985–518–036–5.

106. SADOVSKII, A.P. Cubic systems of nonlinear oscillations with seven limit cycles. In: *Differ. Equa.* 2003, vol. 39, no. 4, pp. 505–516. ISSN 0374–0641.

107. SADOVSKII, A.P., SHCHEGLOVA, T.V. Solution of the center-focus problem for a nine-parameter cubic system. In: *Differ. Equa.* 2011, vol. 47, no. 2, pp. 208–223. ISSN 0374–0641.

108. SADOVSKII, A.P., Centers of a cubic system with an invariant line. In: *Differ. Equa.* 2013, vol. 49, no. 6, 770–772. ISSN 0374–0641.

109. SÁEZ, E., SZÁNTÓ, I. A cubic system with a limit cycle bounded by two invariant parabolas. In: *Diff. Equations and Dyn. Systems.* 2009, vol. 17, no. 1 & 2, pp. 163–168. ISSN 0971–3514.

110. SAHARNIKOV, N.A. On Frommer's center conditions. In: *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh.* 1948, vol. 12, pp. 669–670. ISSN 0032–8235.

111. SANG, Bo, NIU, Chuanze. Solution of center-focus problem for a class of cubic systems. In: *Chinese Annals of Mathematics, Series B.* 2016, vol. 37, no. 1, pp. 149–160. ISSN 0252–9599.

112. SCHLOMIUK, D., GUCKENHEIMER, J., RAND, R. Integrability of plane quadratic vector fields, In: *Expo. Math.* 1990, vol. 8, pp. 3–25. ISSN 0723–0869.

113. SCHLOMIUK, D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of centre. In: *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 1993, vol. 338, no. 2, pp. 799–841. ISSN 0002–9947.

114. SCHLOMIUK, D. Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields. In: *Bifurcations and periodic orbits of vector fields (D.Schlomiuk, ed.).* Kluwer Academic Publishes, 1993, pp. 429–467. ISBN 978–90–481–4303–0.

115. SCHLOMIUK, D., VULPE, N. Planar quadratic vector fields with invariant lines of total multiplicity at least five. In: *Qual. Theory of Dyn. Systems.* 2004, vol. 5, pp. 135–194. ISSN 1575–5460.

116. SCHLOMIUK, D., VULPE, N. Planar quadratic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity four. In: *Nonlinear Analysis.* 2008, vol. 68, pp. 681–715. ISSN 0362–546X.

117. SIBIRSKY, C.S. On the conditions for the existence of a center and a focus. In: *Uch. Zap. Kishinev. Gos. Univ.* 1954, vol. 11, pp. 115–117.

118. SIBIRSKY, C.S. The principle of symmetry and the problem of the center. In: *Uch. Zap. Kishinev. Gos. Univ.* 1955, vol. 17, pp. 27–34.

119. SIBIRSKY, C.S. On the number of limit cycles arising from a singular point of focus or center type. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1965, vol. 161, pp. 304–307. ISSN 0002–3264.

120. SIBIRSKY, C.S. The number of limit cycles in the neighborhood of a singular point. In: *Differ. Equ.* 1965, vol. 1, no. 1, pp. 51–66. ISSN 0374–0641.

121. SIBIRSKY, C.S. *Method of invariants in the qualitative theory of differential equations.* Kishinev: Acad. Sci. Moldavian SSR, 1968. 184 p. (Russian).

122. SIBIRSKY, C.S. *Algebraic invariants of differential equations and matrices.* Chişinău: Ştiinţa, 1976. 268 p.

123. SIBIRSKY, C.S. *Introduction to the theory of invariants of differential equations.* New York: Manchester Univesity Press, 1988. 168 p. ISBN 0 7190 2669–5.

124. SIBIRSKY, C.S. Conditions of the existence of an invariant straight line of the quadratic system in the case of centre or focus. In: *Mat. Issled. "Differ. Uravn. i Mat. Fizika".* Chişinău, 1989, vol. 106, pp. 114–118.

125. SONGLING, Shi. A concrete example of the existence of four cycles for plane quadratic systems. In: Scientica sinica, 1980, vol. 23, no. 2, pp. 153–158. ISSN 0250–7870.

126. SUO, G., CHEN, Y. The real quadratic system with two conjugate imaginary straight line solutions. In: *Ann. Diff. Eqs.* 1986, vol. 2, no. 2, pp. 197–207. ISSN 1002–0942.

127. ŞUBĂ, A. On the Kukles and Cherkas center conditions for a cubic system. In: *Differ. Equ.* 1993, vol. 29, no. 4, pp. 728–730. ISSN 0374–0641.

128. ŞUBĂ, A. Sufficient center conditions for a two-dimensional autonomous system with cubic right-hand sides. In: *Differ. Equ.* 1989, vol. 25, no. 11, pp. 2014–2016. ISSN 0374–0641.

129. ŞUBĂ, A. On the structure of an integrating factor for a cubic system with a singular point of center type. In: *Differ. Equ.* 1996, vol. 32, no. 5, pp. 726–729. ISSN 0374–0641.

130. ŞUBĂ, A. Partial integrals, integrability and the center problem. In: *Differ. Equ.* 1996, vol. 32, no. 7, pp. 884–892. ISSN 0374–0641.

131. ŞUBĂ A. Solution of the center problem for cubic systems with a bundle of three invariant straight lines. In: *Bul. Acad. de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2003, vol. 41, no. 1, pp. 91–101. ISSN 1024–7696.

132. ŞUBĂ, A. On the Kukles and Cherkas center conditions for a cubic system. In: *Differential Equations*. 1993, vol. 29, no. 4, pp. 728–730. ISSN 0012–2661.

133. ŞUBĂ, A., COZMA, D. Solution of the problem of the center for cubic systems with two homogeneous and one non–homogeneous invariant straight lines. In: *Bul. Acad. de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 1999, no. 1, pp. 37–44. ISSN 1024–7696.

134. ŞUBĂ, A., COZMA, D. Solution of the problem of the centre for cubic system with three invariant straight lines two of which are parallel. In: *Bul. Acad. de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2001, vol. 36, no. 2, pp. 75–86. ISSN 1024–7696.

135. ŞUBĂ, A., COZMA, D. Solution of the problem of center for cubic differential systems with three invariant straight lines in generic position. In: *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2005, vol. 6, p. 45–58. ISSN 1575–5460.

136. ŞUBĂ, A., REPEŞCO, V., PUŢUNTICĂ, V. Cubic systems with invariant affine straight lines of total parallel multiplicity seven. In: *Electronic Journal of Differential Equations*. 2013, vol. 2013, no. 274, pp. 1–22. ISSN 1072–6691.

137. ŚWIRSZCZ, G. An algorithm for finding invariant algebraic curves of a given degree for polynomial planar vector fields. In: *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*. 2005, vol. 15, no. 3, pp. 1033–1044. ISSN 0218–1274.

138. TEIXEIRA, M.A., YANG, J. The center-focus problem and reversibility. In: *Journal of Diff. Equations*. 2001, vol. 174, pp. 237–251. ISSN 0022–0396.

139. USHKHO, D.S. On characteristic of cubic differential systems with six line integrals. In: *Scientific works of FORA*. 2014, no. 9, pp. 88–105.

140. VACARAŞ, O. *Sisteme cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante multiple*: tz. de doct. în matematică. Chişinău, 2017. 150 p.

141. VULPE, N.I. Affine-invariant conditions for topological distinction of quadratic systems in the presence of a center. In: *Differ. Equ.* 1983, vol. 19, no. 3, pp. 371-–379. ISSN 0374–0641.

142. VULPE, N.I., SIBIRSKY, C.S. Centro-affine invariant conditions for the existence of a center of a differential system with cubic nonlinearities. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1988, vol. 301, no. 6, 1297-1301. ISSN 0002–3264.

143. ZHANG, X. *Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analysis*. Singapure, Springer Nature Singa- pure, 2017. 390 p. ISBN 978–981–4225–6.

144. ŻOŁĄDEK, H. On certain generalization of the Bautin's theorem. In: *Nonlinearity.* 1994, vol. 7, pp. 273–279. ISSN 0951–7715.

145. ŻOŁĄDEK, H. Eleven small limit cycles in a cubic vector field. In: *Nonlinearity.* 1995, vol. 8, no. 5, pp. 843–860. ISSN 0951–7715.

146. ŻOŁĄDEK, H. Quadratic systems with center and their perturbations. In: *J. Differential Equations*. 1994, vol. 109, pp. 223–273. ISSN 0022–0396.

147. ŻOŁĄDEK, H. Remarks on: The classification of reversible cubic systems with center. In: *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1996, vol. 8, no. 2, pp. 335–342. ISSN 1230–3429.

148. ŻOŁĄDEK, H. *The solution of the center-focus problem*. Warsaw. 1992. 63 p. (Preprint. University of Warsaw).

149. ŽUPANOVIĆ, V., The dynamics of some cubic vector fields with a center, In: *Mathematical Communications*. 2001, vol. 6, pp. 11–27. ISSN 1331–0623.

150. YU, P., HAN, M. Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem. In: *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 2005, vol. 15, no. 7, pp. 2191–2205. ISSN 0218–1274.

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Dascalescu Anatoli

Semnătura

Data 05.07.2019

CURRICULUM VITAE

Numele: Dascalescu

Prenumele: Anatoli

Data şi locul naşterii:
25.11.1989, s. Costuleni, r. Ungheni, R. Moldova

Cetăţenia: Republica Moldova

Limbi vorbite:
română , rusă (mediu), engleza (mediu)

Studii/Titluri ştiinţifice:
2007–2012 – student la Universitatea de Stat din Tiraspol, Facultatea Fizică Matematică şi Tehnologii Informaţionale, specialitatea fizică şi matematică
2012–2014 – masterand la Universitatea de Stat din Tiraspol, Facultatea Fizică Matematică şi Tehnologii Informaţionale, specializarea Fizică modernă şi tehnologii formative
2015–2017 – masterand la Universitatea de Stat din Tiraspol, Facultatea Fizică Matematică şi Tehnologii Informaţionale, specializarea Matematici moderne şi tehnologii moderne de instruire
2016–2018 – doctorand la Universitatea de Stat din Tiraspol "Dimitrie Cantemir", specialitatea 111.02 - Ecuaţii diferenţiale

Domeniul de interes ştiinţific: teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale

Formarea profesională:
2012–2013, L.T. ”Truşeni”, com. Truşeni, Chişinău, profesor de fizică şi matematică;
2019– prezent, Gimnaziul nr.99 Gh.Madan, com. Truşeni, Chişinău, profesor de fizică şi matematică;

Stagii de cercetare în străinătate (ultimii 5 ani):
Universitatea de Stat din Belarus: 02 ianuarie 2016 – 02 februarie 2016.

Participări în proiecte (ultimii 5 ani):

1. Proiectul Internaţional FP7, nr. 316338, "Dynamical systems and their applications", 2012–2016.
2. Proiectul Instituţional ”15.817.02.18F. Cercetarea structurilor funcţional-topologice şi aplicaţiile lor”, 2015–2018.

Participări la unele conferinţe internaţionale (ultimii 5 ani):

1. Conferinţa ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, ediţia V-a, 25 mai, 2016, Chişinău;
2. Sesiunea naţională de comunicări ţiinţifice studenţeşti, USM, 21- 22 aprilie, 2016, Chişinău;
3. International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education" (MITRE–2016), June 23–26, 2016, Chişinău;

4. The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chişinău, June 28 - July 2, 2017.
5. Conferinţa stiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării stiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, ediţia VI-a, 15 iunie, 2017, Chisinău;
6. The 25th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), September 14 – 17, 2017, Iaşi;
7. International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19 – 21, 2018, Bălţi;
8. International Conference "Modern problems of mathematics and its applications in natural sciences and information technologies", September 17-19, 2018, Chernivtsi, Ukraine;
9. The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2018), September 20 – 23, 2018, Chişinău;
10. International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE2019)", June 24 - 26, 2019, Chişinău.

Participări la seminare ştiinţifice (ultimii 5 ani):

1. Seminarul "Ecuaţii Diferenţiale" din cadrul Facultăţii Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 2016;
2. Seminarul ştiinţific "Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre" din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (13 decembrie 2016; 05 aprilie 2017; 29 ianuarie 2019).

Lucrări ştiinţifice publicate (ultimii 5 ani):

Articole ştiinţifice – 4
Articole în culegeri ştiinţifice de lucrări ale conferinţelor – 3
Comunicări şi teze ale conferinţelor internaţionale – 8

Date de contact: e-mail: anatol.dascalescu@gmail.com; tel. mobil: 068028314