UNIVERSITATEA DE STAT "DIMITRIE CANTEMIR"

Cu titlu de manuscris
CZU 517.925

DASCALESCU ANATOLI

INTEGRABILITATEA SISTEMELOR DIFERENŢIALE CUBICE CU DREPTE ŞI CUBICE INVARIANTE

111.02. ECUAŢII DIFERENŢIALE

Rezumatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Teza a fost elaborată în Şcoala Doctorală
"Matematică şi Ştiinţa Informaţiei"

CHIŞINĂU, 2019

Teza a fost elaborată în Şcoala Doctorală "Matematică şi Ştiinţa Informaţiei", Universitatea de Stat "Dimitrie Cantemir", în consorţim cu Institutul de Matematică şi Informatică "V.A. Andrunachievici", Universitatea de Stat "Alecu Russo" din Bălţi, Universitatea de Stat din Tiraspol şi Universitatea de Stat "Bogdan Petriceicu Haşdeu" din Cahul.

Conducător de doctorat:
COZMA Dumitru, doctor habilitat în ştiinţe matematice, conferenţiar universitar

Componenţa comisiei de doctorat:
1. GAINDRIC Constantin, doctor habilitat în informatică, membru corespondent al AŞM, Institutul de Matematică şi Informatică "V.A. Andrunachievici" – preşedinte
2. CIOBAN Mitrofan, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, academician al AŞM, Universitatea de Stat din Tiraspol – referent
3. PERJAN Andrei, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea de Stat din Moldova – referent
4. ORLOV Victor, doctor în ştiinţe fizico-matematice, Universitatea Tehnică a Moldovei – referent
5. COZMA Dumitru, doctor habilitat în ştiinţe matematice, conferenţiar universitar, Universitatea de Stat din Tiraspol – membru

Susţinerea va avea loc la 20 decembrie 2019, ora 15.00, în şedinţa Comisiei de doctorat, sala polivalentă a Universităţii de Stat "Dimitrie Cantemir" (str. Hânceşti 55/4, Chişinău).

Teza de doctor şi rezumatul pot fi consultate la Biblioteca Ştiinţifică Centrală "A. Lupan", pe pagina web a ANACEC (www.cnaa.md) şi pe pagina web a USDC (www.usdc.md)

Rezumatul a fost expediat la 19 noiembrie 2019.

Secretar ştiinţific
doctor, conferenţiar cercetător ______________ NAVAL Elvira

Conducător ştiinţific
doctor habilitat, conferenţiar universitar ______________ COZMA Dumitru

Autor ______________ DASCALESCU Anatoli

CUPRINS

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Teza de faţă se referă la teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. În lucrare este studiată integrabilitatea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu punct singular de tip centru sau focar ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Actualitatea şi importanţa problemei abordate. Ştiinţa modernă a arătat că studiul fenomenelor din natură implică crearea unor modele matematice care prin formulare să cuprindă principalele caracteristici ale fenomenelor. Aceasta a condus la faptul că modelul cel mai potrivit pentru fenomenele evolutive poate fi reprezentat printr-un sistem de ecuaţii diferenţiale. Astfel, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea s-au pus bazele teoriei moderne a stabilităţii, prin lucrările matematicianului rus A.M. Liapunov care, în teza sa de doctorat (1892), a definit principalele concepte de stabilitate. Rezultate importante în acest domeniu au mai fost obţinute de H. Poincaré şi J. Maxwell în procesul de studiu a stabilităţii mişcării corpurilor cereşti. Un salt calitativ în teoria ecuaţiilor diferenţiale a fost secolul al XX-lea, prin introducerea unor metode noi: metoda gradului topologic, teoria bifurcaţiei etc.

O problemă importantă a teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale este *problema ciclicităţii*, numită şi problema locală a 16-a a lui Hilbert, care constă în estimarea ciclurilor limită ce pot apărea la bifurcaţii din puncte singulare de tip centru sau focar. Această problemă este parte componentă a problemei a 16-a a lui Hilbert [22], care nu este rezolvată până-n prezent. Un pas semnificativ în rezolvarea problemei ciclicităţii îl constituie rezolvarea problemei deosebirii centrului de focar, numită *problema centrului.*

Studiul problemei centrului îşi are începutul în lucrările clasice ale lui Poincaré [29] şi Lyapunov [28], unde a fost arătat că prezenţa centrului într-un sistem diferenţial analitic poate fi stabilită prin rezolvarea unui sistem infinit de ecuaţii polinomiale în raport cu coeficienţii sistemului diferenţial. Aceste ecuaţii polinomiale sunt numite condiţii de centru, iar însăşi polinoamele - *mărimi focale* (sau *constante Lyapunov*).

Ţinând cont de teorema lui Hilbert despre baza finită, sistemul infinit de ecuaţii polinomiale este echivalent cu un sistem finit, adică, există aşa un număr finit de mărimi focale, astfel încât anularea lor implică anularea tuturor. Prin urmare, condiţiile necesare de centru pot fi găsite prin rezolvarea acestui sistem cu un număr finit de ecuaţii polinoame.

Cu toate că problema centrului a fost formulată la sfârşitul secolului al XIX-lea, actualmente ea este complet rezolvată doar pentru: sistemele diferenţiale pătratice (Dulac, Kapteyn, Frommer, Saharnikov, Sibirsky, Malkin, Schlomiuk, Żoladek); sistemele diferenţiale cubice simetrice (Malkin, Lunkevich, Sibirsky, Rousseau, Schlomiuk, Żoladek); sistemul diferenţial Kukles (Kukles, Cherkas, Christopher, Lloyd, Şubă, Rousseau, Schlomiuk, Sadovskii); sistemul complex quartic Lotka-Volterra (Ferčec, Giné, Romanovski); sistemul complex quintic Lotka-Volterra (Gine, Romanovski), ş.a.

Cercetarea calitativă a sistemelor pătratice cu punct singular de tip centru a fost realizată de Vulpe [40], iar exprimarea prin invarianţi algebrici a condiţiilor de centru pentru sistemele cubice simetrice a fost efectuată de Sibirschi [37].

În caz general, problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice ce conţin în acelaşi timp omogenităţi pătratice şi omogenităţi cubice, nu este complet rezolvată până în prezent. Condiţiile necesare şi suficiente ca un punct singular cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice pur imaginare să fie centru au fost obţinute doar în unele cazuri particulare: pentru sistemele cubice cu infinitul degenerat (Kompel, Şubă, Chavarriga, Gine), pentru sistemele cubice cu părţile drepte de o formă specială (Daniliuk, Şubă, Romanovski, Lloyd), pentru un sistem cubic cu nouă parametri şi care poate fi redus prin transformări la un sistem de tip Liénard (Bondar, Sadovskii, Shcheglova), pentru sistemele cubice care au patru drepte şi trei drepte invariante (Şubă, Cozma), două drepte invariante şi o conică invariantă (Cozma), pentru sistemele cubice ce au integrală primă de forma $F_4^{\beta_1} F_6^{\beta_2} = C$ (Baltag), unde $F_j = 0$ sunt curbe algebrice invariante de gradul j.

Pentru unele clase de sisteme diferenţiale polinomiale problema centrului a fost studiată în monografiile matematicienilor Sadovskii [34], Romanovski şi Shafer [33], Christopher şi Li [6], Cozma [13], Zhang [41], Popa şi Pricop [30]. Rezolvarea problemei generalizate a centrului (Ciobanu [8]), a fost obţinută de Popa şi Pricop [31].

Problema ciclicităţii punctului singular de tip centru sau focar, pentru unele clase de sisteme diferenţiale cubice, a fost examinată în lucrările: Żołądek [43], Bothmer şi Kröker [3], Yu şi Han [45], Romanovski şi Shafer [33], Levandovskyy, Pfister şi Romanovski [25], Gaiko [19], Li, Liu şi Yang [26], Ferčec şi Mahdi [18], ş.a.

Problema integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale cu puncte singulare de tip centru şi cu un anumit număr de soluţii algebrice a fost examinată în lucrările: Şubă [38], Kooij şi Christopher [24], Chavarriga, Giacomini şi Giné [5], Christopher, Llibre, Pantazi şi Zhang [7], Giné şi Romanovski [21], Cao, Llibre şi Zhang [4], Dukaric şi Giné [17].

O nouă abordare a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale a fost realizată în lucrările Şubă şi Cozma [13, 15, 38], prin luarea în considerare, concomitent, a curbelor algebrice invariante, mărimilor Lyapunov şi a integrabilităţii Darboux. A fost propusă o direcţie nouă de cercetare a problemei centrului pentru sistemele polinomiale şi anume, *problema determinării consecutivităţilor centrice*: pentru fiecare număr natural dat n, $n \geq 3$, să se determine toate consecutivităţile centrice ale sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n ce au puncte singulare de tip centru sau focar.

În lucrarea [13] a fost rezolvată problema consecutivităţilor centice pentru sistemele diferenţiale cubice în cazurile când sistemul are: patru drepte invariante; trei drepte invariante; două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă.

În teza de faţă sunt prezentate rezultatele studiului problemei centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar ce posedă două drepte invariante $l_1 \equiv 1 + a_1x + b_1y = 0$, $l_2 \equiv 1 + a_2x + b_2y = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă de forma

$\Phi \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0.$ Sunt formulate următoarele probleme:

Problema 1. *Să se determine condiţiile de existenţă a două drepte invariante distincte şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemele diferenţiale cubice.*

Problema 2. *Să se determine toate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.*

Problemele 1 şi 2 sunt soluţionate în Capitolele 2, 3 şi 4.

Scopul lucrării: determinarea condiţiilor de existenţă a centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă.

Obiectivele cercetării:

– determinarea condiţiilor de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar;

– studierea integrabilităţii sistemelor diferenţiale cubice în prezenţa a două drepte invariante şi a unei cubice invariante;

– rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă;

– stabilirea ciclicităţii punctului singular de tip centru sau focar în sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Ipoteza cercetării. Soluţionarea problemei centrului pentru sistemul diferenţial cubic, cu două drepte invariante şi o cubică invariantă, va fi realizată dacă: vor fi stabilite relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală; va fi dezvoltată metoda de integrabilitate Darboux; vor fi determinate consecutivităţile centrice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Obiectivele formulate au contribuit la fundamentarea conceptelor ştiinţifice. În premieră, pentru sistemele diferenţiale cubice sunt determinate noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului, care reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită.

Metodologia cercetării ştiinţifice. Cercetările ştiinţifice realizate în teză sunt bazate pe metodele teoriei calitative a sistemelor dinamice, metodele algebrice de calcul computaţional, metodele de parametrizare a curbelor algebrice. Problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă curbe algebrice invariante este cercetată prin folosirea metodei de integrabilitate Darboux şi a reversibilităţii sistemului diferenţial.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. A fost rezolvată problema centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar, care posedă două drepte invariante $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă $\Phi = 0$. Astfel:

– au fost obţinute condiţii noi de existenţă a centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă;

– a fost demonstrată integrabilitatea Darboux a sistemului diferenţial cubic cu punct singular de tip centru în cazurile când soluţiile algebrice formează un fascicol de curbe sau ele se află în poziţia generică;

– au fost determinate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă;

– au fost obţinute rezultate noi în problema ciclicităţii pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în stabilirea unor relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală, ceea ce a contribuit la dezvoltarea metodei de integrabilitate Darboux, fapt ce a permis determinarea unor noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Semnificaţia teoretică a lucrării: a fost dezvoltată metoda de investigare a problemei centrului care se bazează pe relaţiile dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea Darboux.

Valoarea aplicativă a lucrării: pentru sistemele diferenţiale cubice au fost obţinute rezultate noi ce ţin de problema centrului şi ciclicităţii, care reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– condiţiile de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemul diferenţial cubic cu punct singular de tip centru sau focar;

– consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante $l_1 \equiv 1 + a_1x + b_1y = 0$, $l_2 \equiv 1 + a_2x + b_2y = 0$ distincte şi o cubică invariantă ireductibilă $\Phi \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0$:

$$(l_1 || l_2,\ \Phi;\ N = 2); \quad (l_1,\ l_2,\ l_1 \nparallel l_2,\ \Phi;\ N = 3);$$

– condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă;

– demonstraţia integrabilităţii Darboux sau a reversibilităţii sistemelor cubice cu singularităţi de tip centru în cazul a două drepte invariante şi a unei cubice invariante.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute în teză:

– pot fi aplicate în investigaţiile problemei integrabilităţii şi a problemei ciclurilor limită pentru sistemele diferenţiale polinomiale;

– pot fi folosite în studiul unor modele matematice ce descriu procese naturale şi sociale: dinamica populaţiilor, epidemiologie, ecologie, imunologie, fizica plasmei, fizica laserului, reţelele neuronale ş.a.;

– pot servi drept suport pentru tezele de master şi unele cursuri opţionale universitare ţinute studenţilor şi masteranzilor la facultăţile cu profil real sau tehnic.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele ştiinţifice expuse în teză au fost examinate şi aprobate la seminarele ştiinţifice: "Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre" din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (13 decembrie 2016, 5 aprilie 2017, 29 ianuarie 2019), Chişinău; "Ecuaţii Diferenţiale" din cadrul Facultăţii Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 17 ianuarie, 2016.

Rezultatele ştiinţifice au fost prezentate în secţiile conferinţelor ştiinţifice:

International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education" (MITRE 2019), June 24–26, 2019, Chişinău; International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19 – 21, 2018, Bălţi; International Conference "Modern problems of mathematics and its applications in natural sciences and information technologies", September 17–19, 2018, Chernivtsi, Ukraine; The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2018), Chişinău, Tehnical University of Moldova, September 20 – 23, 2018; The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chişinău, June 28 – July 2, 2017; The 25th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), Iaşi, România, September 14 – 17, 2017; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", 15 iunie, 2017, Chişinău; International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE 2016), June 23–26, 2016 Chişinău; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", 25 mai, 2016, Chişinău; Sesiunea naţională de comunicări ştiinţifice a studenţilor, Universitatea de Stat din Moldova, 21–22 aprilie, 2016, Chişinău.

Publicaţiile la tema tezei. Rezultatele de bază ale cercetărilor au fost publicate în 15 lucrări, 4 articole ştiinţifice recenzate şi publicate în 3 ţări (Moldova, România, Ucraina), 3 articole în culegeri de articole recenzate, 8 comunicări şi rezumate ale conferinţelor internaţionale; 6 lucrări sunt publicate fără coautori (inclusiv 4 articole).

Volumul şi structura tezei. Teza este scrisă în limba română şi constă din: introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie (150 titluri), 135 pagini text de bază, adnotarea în limbile română, rusă şi engleză.

CONŢINUTUL TEZEI

În **Introducere** este prezentată actualitatea şi importanţa cercetărilor efectuate, motivaţia cercetărilor întreprinse, scopul şi obiectivele tezei, noutatea şi originalitatea ştiinţifică, problemele ştiinţifice soluţionate, semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării, rezultatele înaintate spre susţinere, precum şi aprobarea lor.

Capitolul 1, Problema centrului şi a integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale, conţine o analiză a celor mai importante rezultate cunoscute în domeniul teoriei integrabilităţii ecuaţiilor diferenţiale care ţin de sarcinile şi obiectivele lucrării: a 16-a problemă locală a lui Hilbert; problema integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale cu soluţii algebrice; problema deosebirii centrului de focar; problema consecutivităţilor centrice.

Fie sistemul diferenţial polinomial de forma

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

unde variabila independentă t (timpul) şi variabilele dependente x şi y se consideră reale, iar $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ reprezintă nişte elemente din inelul polinoamelor asupra câmpului de numere reale, adică $P,\ Q \in \mathbb{R}[x, y]$. Cu $n = \max\{deg\, P, deg\, Q\}$ vom nota gradul sistemului polinomial (1) şi vom presupune că polinoamele $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sunt relativ prime în $\mathbb{R}[x, y]$. Dacă $n = 2$, atunci sistemul (1) se numeşte sistem diferenţial pătratic, iar dacă $n = 3 -$ sistem diferenţial cubic.

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct singular al sistemului (1), adică $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Fără a restrânge generalitatea putem considera că M coincide cu originea sistemului de coordonate, adică $x_0 = y_0 = 0$. Să considerăm liniarizarea sistemului (1) în $O(0, 0)$:

$$\frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y, \quad \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y. \tag{2}$$

Una dintre cele mai importante probleme care nu este rezolvată până-n prezent pentru sistemele diferenţiale polinomiale este: *în care condiţii sistemul iniţial (1) şi sistemul liniarizat (2) au aceeaşi comportare calitativă şi structură topologică în vecinătatea punctului singular* $O(0, 0)$?

Problema dată a fost soluţionată cu excepţia cazului când punctul singular este de tip centru sau focar. Dacă pentru sistemul liniarizat (2) rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\lambda^2 - (a_{10} + b_{01})\lambda + a_{10}b_{01} - b_{10}a_{01} = 0$$

au părţile reale nenule ($Re\lambda_j \neq 0, j = 1, 2$), atunci punctul singular $O(0, 0)$ este de tip hiperbolic, iar portretele de fază locale ale sistemului (1) şi ale sistemului liniarizat (2) sunt topologic aceleaşi.

Situaţia este de altă natură când rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt pur imaginare $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, $\beta \neq 0$, $i^2 = -1$. În acest caz, punctul singular $O(0, 0)$ este de tip *centru* pentru sistemul liniarizat (2) şi de tip *centru sau focar* pentru sistemul neliniar (1).

Punctul singular $O(0, 0)$ al sistemului diferenţial (1) se numeşte *focar*, dacă într-o vecinătate a lui toate traiectoriile sunt spirale şi se numeşte *centru*, dacă toate traiectoriile sunt închise. Printr-o transformare liniară a necunoscutelor şi schimbarea timpului, sistemul (1) poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = y + \sum_{j=2}^{n} p_j(x, y) \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = -x - \sum_{j=2}^{n} q_j(x, y) \equiv Q(x, y), \tag{3}$$

unde $p_j(x, y)$ şi $q_j(x, y)$ sunt polinoame omogene de gradul j. Pentru punctul singular $O(0, 0)$ al sistemului (3) avem $\lambda_{1,2} = \pm i$, $i^2 = -1$. Prin urmare, el este de tip centru sau de tip focar, numit de unii autori *focar fin* sau *focar slab* sau punct singular *monodromic.*

Astfel, pentru sistemele diferenţiale polinomiale apare problema deosebirii cazurilor când punctul singular $O(0,0)$ este centru de cazurile când $O(0,0)$ este focar numită, în continuare, *problema centrului.*

Problema centrului. Să se determine condiţiile necesare şi suficiente asupra polinoamelor $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ astfel ca punctul singular ce are rădăcinile ecuaţiei caracteristice pur imaginare să fie pentru sistemul (1) de tip *centru.*

Deşi problema centrului a fost formulată la sfârşitul secolului al XIX-lea, ea este complet rezolvată doar pentru: sistemele pătratice $\dot{x} = y + p_2(x,y),\ \dot{y} = -x + q_2(x,y)$; sistemele cubice simetrice $\dot{x} = y + p_3(x,y),\ \dot{y} = -x + q_3(x,y)$; sistemul Kukles $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + q_2(x,y) + q_3(x,y)$. Pentru sistemele diferenţiale cubice de forma

$$\dot{x} = y + p_2(x,y) + p_3(x,y), \quad \dot{y} = -x + q_2(x,y) + q_3(x,y), \tag{4}$$

problema centrului nu este complet rezolvată până-n prezent.

Pe parcursul anilor au fost dezvoltate mai multe metode ce permit rezolvarea problemei centrului. Astfel, Lyapunov [28] a demonstrat că punctul singular $O(0,0)$ este centru pentru sistemul (3) dacă şi numai dacă sistemul posedă într-o vecinătate oarecare a lui $O(0,0)$ o integrală primă analitică de forma $F(x,y) = C$. La fel, este cunoscut (Amel'kin şi alţii [1]) că $O(0,0)$ este centru pentru sistemul (3) dacă şi numai dacă sistemul dat are într-o vecinătate a punctului $O(0,0)$ un factor integrant analitic de forma $\mu(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x,y)$, unde μ_k sunt polinoame omogene de gradul k.

În [42] Żołądek a propus trei mecanisme generale de soluţionare a problemei centrului: 1) construirea integralei prime de tipul Darboux; 2) căutarea integralei prime de tipul Darboux–Schwarz–Christoffel; 3) reversibilitatea raţională. El afirmă că aceste mecanisme sunt suficiente pentru rezolvarea completă a problemei centrului.

Aşadar, rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale este strâns legată de integrabilitatea acestora. În această lucrare ne-a interesat doar integrabilitatea algebrică a sistemelor date, numită *integrabilitatea Darboux.* Ea constă în construirea, sub o anumită formă, a integralei prime sau a factorului integrant a sistemului diferenţial polinomial din curbele lui algebrice invariante.

Definiţia 1.1. *Curba algebrică $\Phi(x,y) = 0$ în $\mathbb{C}^2$, unde $\Phi \in \mathbb{C}[x,y]$, se numeşte curbă algebrică invariantă a sistemului polinomial (1), dacă există un aşa polinom $K(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ încât în variabilele x şi y are loc identitatea*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} P(x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Q(x,y) \equiv \Phi(x,y) K(x,y). \tag{5}$$

Polinomul $K(x,y)$ se numeşte cofactorul curbei algebrice invariante $\Phi(x,y) = 0$.

Menţionăm că pentru o curbă algebrică $\Phi(x,y) = 0$ a sistemului (1), de gradul $n \geq 2$ avem $deg\, K_\Phi \leq n-1$.

Definiţia 1.2. *Curba algebrică invariantă $\Phi(x, y) = 0$ se numeşte soluţie algebrică a sistemului (1), dacă $\Phi(x, y)$ reprezintă un polinom ireductibil în $\mathbb{C}[x, y]$.*

Pentru sistemele polinomiale reale, o curbă algebrică complexă poate fi invariantă doar atunci când şi conjugata ei este o curbă invariantă.

Teorema 1.2. *O curbă algebrică complexă $\Phi(x, y) = 0$ este curbă invariantă pentru sistemul diferenţial polinomial real (1) dacă şi numai dacă şi conjugata ei $\overline{\Phi(x, y)} = 0$ este curbă invariantă. Dacă curbele conjugate $\Phi(x, y) = 0$ şi $\overline{\Phi(x, y)} = 0$ sunt invariante, atunci şi cofactorii lor K_Φ şi $K_{\overline{\Phi}}$ sunt, la fel, reciproc conjugaţi.*

În cazul sistemelor diferenţiale polinomiale (3) cu puncte singulare de tip centru sau focar, formele curbelor algebrice invariante au fost determinate în lucrarea [13]:

– o dreaptă invariantă poate avea doar una dintre următoarele forme

$$1 + Ax + By = 0, \quad A,\, B \in \mathbb{C},\ (A, B) \neq (0, 0) \tag{6}$$

sau $x - iy = 0,\ x + iy = 0,\ i^2 = -1$;

– o conică invariantă ireductibilă poate avea forma

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0,$$

unde $(a_{20}, a_{11}, a_{02}) \neq 0,\ \ a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01} \in \mathbb{C}$;

– o cubică invariantă ireductibilă poate avea doar una dintre următoarele forme

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0$$

sau

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + x^2 + y^2 = 0, \tag{7}$$

unde $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0,\ \ a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Determinarea condiţiilor de existenţă a unor curbe algebrice invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale de grad mai mare ca unu este o problemă dificilă şi însoţită de calcule voluminoase. În unele cazuri, această problemă poate fi de nerezolvat fiindcă nu sunt cunoscute metode care ar furniza informaţii despre numărul de curbe algebrice invariante şi despre gradele lor într-un sistem polinomial (Giné [20]).

Problema deschisă 1. *Pentru clasa sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n să se determine o aşa mărime $\alpha(n)$ care ar mărgini uniform de sus numărul de curbe algebrice invariante şi ireductibile ale fiecăruia dintre aceste sisteme.*

Problema deschisă 2. *Pentru fiecare sistem diferenţial polinomial să se determine marginea superioară a gradelor soluţiilor algebrice ale lui.*

Pe parcursul anilor o atenţie sporită a fost acordată sistemelor diferenţiale polinomiale care posedă curbe algebrice invariante, studiului cărora le sunt dedicate un număr mare de lucrări ştiinţifice. Dreptele invariante au fost folosite la cercetarea sistemelor pătratice în lucrările autorilor Bautin, Drujkova, Sibirschi, Popa, Schlomiuk, Vulpe, iar la cercetarea sistemelor cubice în lucrările autorilor Ljubimova, Kooij, Şubă, Cozma, Sadovskii, Lloyd, Romanovski, Rousseau, Schlomiuk, Puţuntică, Ushkho, Repeşco, Bujac, Vacaraş.

Conicele invariante au fost utilizate la cercetarea sistemelor pătratice şi sistemelor cubice în lucrările autorilor Cherkas, Schlomiuk, Christopher, Llibre, Oliveira, Cozma, Giné, Vulpe, Sáez, Szánto, Rezende.

Cubicele invariante au fost considerate la cercetarea sistemelor pătratice şi sistemelor cubice în lucrările lui Evdokimenko, Cherkas, Županović, Garcia, Cozma, Dascalescu.

În lucrarea de faţă, pentru sistemele diferenţiale cubice (4) sunt determinate condiţiile asupra coeficienţilor sistemului ce asigură existenţa a două drepte invariante distincte de forma (6) şi a unei cubice invariante ireductibile de forma (7). Vom considera integrala primă (factorul integrant) a sistemului (3) formată din curbe algebrice invariante.

Definiţia 1.5. *Fie $\Phi_j = 0,\ j = 1, \ldots, q$, curbe algebrice invariante ale sistemului (3) din $\mathbb{C}[x, y]$. Integrala primă (factorul integrant) de forma*

$$\Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \ldots \Phi_q^{\alpha_q} = C \quad \left(\mu = \Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \ldots \Phi_q^{\alpha_q}\right), \tag{8}$$

unde $\alpha_j,\ j = 1, \ldots, q$ sunt numere complexe, nu toate zero, se numeşte integrală primă (factor integrant) Darboux.

Metoda de integrare a sistemelor diferenţiale polinomiale prin folosirea curbelor algebrice invariante a fost elaborată de către Darboux [16]. Anume el a propus, pentru prima dată, ca integrala primă (factorul integrant) a sistemelor diferenţiale ce posedă curbe algebrice invariante să fie construită sub forma (8). Dacă sistemul diferenţial (3) are integrală primă (factor integrant) de tip Darboux, unde $\Phi_j(x, y) = 0$ sunt curbe algebrice invariante ale sistemului, atunci vom spune că sistemul dat este *Darboux integrabil.*

Problema deschisă 3. *Pentru sistemele diferenţiale polinomiale de gradul n să se determine relaţiile dintre gradele curbelor algebrice invariante, numărul lor, existenţa şi tipul integralelor prime.*

Un răspuns parţial la această problemă a fost dat de Darboux:

Teorema 1.7. *Fie sistemul diferenţial (1) are cel puţin q curbe algebrice invariante ireductibile $\Phi_j = 0,\ j = 1, \ldots, q$. Dacă $q \geq \frac{1}{2}n(n + 1)$, atunci (1) este Darboux integrabil, adică sistemul posedă integrală primă sau factor integrant de tip Darboux.*

Mulţi matematicieni au folosit cu succes metoda Darboux de integrare la rezolvarea problemei centrului pentru unele clase de sisteme polinomiale: Schlomiuk [35] a demonstrat pentru prima dată aplicativitatea metodei Darboux în toate cazurile de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale pătratice; Şubă şi Cozma au obţinut condiţiile de existenţă a centrului pentru sistemele cubice care au patru drepte invariante [14, 15], trei drepte invariante [13,46], două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă [10–13]; Hill, Lloyd şi Pearson [23] au obţinut condiţiile de existenţă a centrului pentru un sistem cubic de tip Kukles folosind soluţii algebrice de gradele unu, doi şi trei.

În lucrarea lui Poincaré [29] se arată, că dacă un sistem diferenţial, pentru care $O(0, 0)$ este punct singular de tip centru sau focar, are axă de simetrie ce trece prin $O(0, 0)$, atunci $O(0,0)$ este centru. Żołądek [44] a generalizat noţiunea de simetrie, numind-o reversibilitate, şi a clasificat sistemele cubice cu centru şi cu proprietatea de reversibilitate.

Definiţia 1.6. *Vom spune că sistemul diferenţial (3) este reversibil în timp, dacă portretul lui de fază este invariant la o reflecţie în raport cu o dreaptă ce trece prin originea sistemului de coordonate şi la schimbarea semnului timpului.*

Un algoritm de depistare a sistemelor diferenţiale polinomiale reversibile a fost propus de Romanovski [32], iar interdependenţa dintre reversibilitate şi problema centrului a fost studiată de către Teixeira şi Jiazhong [39]. Unele transformări biliniare ce reduc sistemul dat la un sistem cu axă de simetrie au fost studiate de Llyod şi Pearson [27], Cozma [9], care au permis obţinerea condiţiilor de existenţă a centrului pentru unele sisteme cubice.

O altă metodă de rezolvare a problemei centrului se bazează pe utilizarea funcţiei Lyapunov. Se ştie, că există o aşa serie formală de puteri $F(x,y) = \sum F_j(x,y)$, încât viteza de schimbare a ei de-a lungul traiectoriilor sistemului (3) reprezintă o combinaţie liniară a polinoamelor $\{(x^2+y^2)^j\}_{j=2}^{\infty}: \dfrac{dF}{dt} = \sum_{j=2}^{\infty} L_{j-1}(x^2+y^2)^j$.

Constantele $L_j,\ j=\overline{1,\infty}$ sunt polinoame în raport cu coeficienţii sistemului (3) şi se numesc *mărimi Lyapunov* (Amel'kin, Lukashevich şi Sadovskii [1], Şubă [38]).

Dacă $L_1 = L_2 = \cdots = L_{m-1} = 0$, iar $L_m \neq 0$, atunci vom spune că punctul singular $O(0,0)$ este un focar fin (focar slab) de ordinul m. Cel mult m cicluri limită de amplitudine mică pot fi bifurcate din $O(0,0)$ la perturbarea coeficienţilor sistemului (3).

Teorema 1.9. *Punctul singular $O(0,0)$ este centru pentru sistemul diferenţial polinomial (3) dacă şi numai dacă toate mărimile Lyapunov se anulează, adică $L_j = 0,\ j=\overline{1,\infty}$.*

Astfel, problema centrului pentru un sistem diferenţial polinomial poate fi redusă la problema rezolvării unui sistem infinit de ecuaţii polinomiale în raport cu coeficienţii sistemului diferenţial. Ţinând cont de teorema lui Hilbert despre baza finită, sistemul infinit de ecuaţii polinomiale $L_k = 0,\ k=\overline{1,\infty}$, este echivalent cu un sistem finit $L_k = 0$, $k=\overline{1,N}$, adică există un număr N astfel încât anularea primelor N mărimi Lyapunov implică anularea tuturor mărimilor.

Cu toate că este necesar de calculat doar un număr finit de mărimi Lyapunov, în fiecare caz aparte, nu se cunoaşte acest număr. Aceasta ar fi explicaţia, că numărul N a fost determinat doar pentru unele clase înguste de sisteme diferenţiale polinomiale. Numărul N este cunoscut pentru sistemele pătratice $N=3$ (Bautin [2]) şi pentru sistemele cubice simetrice $N=5$ (Sibirschi [36], Żołądek [43]).

În cazul sistemului diferenţial polinomial (3) avem următoarea problemă:

Problema deschisă 4. *Pentru oricare n $(n \geq 3)$ fixat să se determine un aşa număr minim $N = N(n)$, încât anularea primelor N mărimi Lyapunov să asigure pentru sistemul (3) existenţa centrului în punctul singular $O(0,0)$.*

O soluţie în cazul Problemei deschise 4, care permite rezolvarea Problemei generalizate a centrului (Ciobanu [8]), a fost obţinută în lucrarea Popa şi Pricop [31]. Folosind metoda algebrelor Lie şi a algebrelor graduate Sibirschi a fost găsită o estimare pentru numărul maximal de mărimi focale algebric independente utilizate la rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale de gradul n.

În lucrarea [13], numărul N a fost determinat pentru sistemul diferenţial cubic (4) în presupunerea că acesta posedă drepte şi conice invariante. Astfel, în cazul a patru drepte invariante numărul N este egal cu 2; în cazul a trei drepte invariante $-$ $N = 7$, iar în cazul a două drepte invariante şi o conică invariantă $-$ $N = 4$.

Fie sistemul diferenţial polinomial (3) are M curbe algebrice invariante $\Phi_k(x, y) = 0$, $k = 1, \dots, M$, unde $M < n(n+1)/2$. În aceste condiţii, ţinând cont de Problema deschisă 4, să se determine un aşa număr minim N, încât anularea primelor N mărimi Lyapunov să asigure pentru sistemul (3) existenţa centrului în punctul singular $O(0, 0)$.

Pentru prima dată această problemă a fost examinată în lucrările autorilor Şubă şi Cozma [13,15,38]. A fost propusă o nouă abordare a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale (3) prin luarea în considerare, concomitent, a curbelor algebrice invariante, mărimilor Lyapunov şi a integrabilităţii Darboux.

Definiţia 1.7. *Vom spune că consecutivitatea* (Φ_k, $k = \overline{1, M}$; N), *formată din curbele algebrice* $\Phi_k(x, y) = 0$, $k = \overline{1, M}$ *şi numărul natural* N, *este o consecutivitate centrică pentru sistemul (3), dacă din faptul, că curbele date sunt invariante şi primele* N *mărimi Lyapunov sunt nule, rezultă că punctul singular* $O(0, 0)$ *este de tip centru pentru (3).*

În lucrarea [13] a fost rezolvată problema consecutivităţilor centrice pentru sistemele diferenţiale cubice (4) în cazurile când sistemul are: patru drepte invariante; trei drepte invariante; două drepte invariante şi o conică invariantă ireductibilă.

Aşa cum problema centrului pentru sistemul diferenţial cubic (4) nu este complet rezolvată, în teza de faţă formulăm următoarele două probleme fundamentale:

Problema 1. *Să se determine condiţiile de existenţă a două drepte invariante distincte şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemele diferenţiale cubice.*

Problema 2. *Să se determine toate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.*

Soluţiile obţinute pentru Problemele 1 şi 2 sunt incluse în Capitolele 2, 3 şi 4.

În **Capitolul 2, Sisteme cubice cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă,** este descrisă rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă ([61], [56], [47]).

Fie sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale (4) scris sub forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 = P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) = Q(x, y), \end{aligned} \tag{9}$$

unde $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sunt polinoame reale în variabilele x şi y. Originea de coordonate $O(0, 0)$ este pentru sistemul (9) punct singular de tip centru sau focar.

Fie sistemul cubic (9) are două drepte invariante paralele l_1 şi l_2 de forma (6), care pot fi reale sau complexe ($l_2 = \overline{l_1}$). Efectuăm o rotaţie a sistemului de coordonate, astfel încât dreptele să fie paralele la axa ordonatelor (Oy), iar partea liniară a sistemului (9) rămâne neschimbată.

Lema 2.1. *Sistemul (9) are două drepte invariante paralele la axa ordonatelor Oy*

$$l_{1,2} \equiv 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0, \tag{10}$$

dacă şi numai dacă se realizează următorul set de condiţii:

$$a = f = k = p = r = 0, \;\; m(c^2 - 4m) \neq 0. \tag{11}$$

Cofactorii acestor drepte invariante au forma $K_{1,2}(x, y) = y(2mx + c \pm \sqrt{c^2 - 4m})/2$.

În Teorema 2.1, pentru clasa de sisteme cubice (9) care au două drepte invariante paralele, au fost determinate condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a unei cubice invariante ireductibile de forma

$$\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0, \tag{12}$$

unde $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0$ şi $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03} \in \mathbb{R}$. Aceste condiţii sunt grupate în 9 seturi şi pentru fiecare set se rezolvă problema centrului. Rezultatele ce ţin de problema dată sunt incluse în următoarele două teoreme:

Teorema 2.2. *Fie sistemul cubic (9) posedă două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă ireductibilă. Atunci punctul singular $O(0, 0)$ este centru dacă şi numai dacă primele două mărimi Lyapunov se anulează.*

Teorema 2.3. *Originea sistemului de coordonate este centru pentru sistemul cubic (9), cu două drepte invariante paralele (10) şi o cubică invariantă ireductibilă (12), dacă şi numai dacă se realizează cel puţin unul dintre următoarele 7 seturi de condiţii:*

(i) $a = f = k = p = r = d = l = q = 0$, $s = (-2b^2 - 5bc + 2bg - 3c^2 + 3cg + n)/3$, $m = (-2n)/3$;

(ii) $a = f = k = p = r = l = 0$, $g = [b(b^2 - d^2)]/(2d^2)$, $m = 3(b^2 + d^2)$, $c = -3b$, $n = (-2m)/3$, $q = (bm)/(6d)$, $s = (-b^2m)/(6d^2)$;

(iii) $a = f = k = p = r = 0$, $l = [(5b + 4g - c)d]/9$, $m = 2(b + g)(c - 2b - 2g)$, $q = [(c - g - 2b)d]/3$, $n = [(2b + 4g - c)(5b + 4g - c)]/3$, $s = [(2b + g - c)(c - 2b - 4g)]/9$, $d^2 = (2b + 4g - c)(4b + 2g + c)$;

(iv) $a = f = k = p = r = l = 0$, $g = b + c$, $n = b(b + g)$, $m = -2b(b + g)$, $s = -b(b + g)$, $q = d(b + g)$, $16b^2 - 3d^2 = 0$;

(v) $a = f = k = p = r = 0$, $c = 2b + 2g$, $l = [(b + c)d]/9$, $q = (dg)/3$, $s = (2g^2)/9$, $m = (12bg + 8g^2 - d^2)/9$, $n = [2(d^2 - 3bg - 2g^2)]/9$;

(vi) $a = f = k = p = r = l = q = s = 0$, $g = -b$, $c = -2b$, $m = (16b^2 - 3d^2)/16$, $n = -m$;

(vii) $a = f = k = p = r = d = l = q = 0$, $m = [(3cu+2bu+3v)(cu-2bu-3v)]/(16u^2)$, $g = b+c-u$, $n = [-8mu^2-3v(2bu+3cu+3v)]/(8u^2)$, $s = [(8u^2-9cu-6bu-9v)v]/(8u^2)$.

Următorul exemplu ne arată că pentru existenţa centrului cerinţa ca primele două mărimi Lyapunov să se anuleze este esenţială. Sistemul cubic

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y(25c^2x^2 + 108cx + 108)/108, \ c \neq 0, \\
\dot{y} &= -(1296x + 1242cx^2 + 936cxy - 702cy^2 + 297c^2x^3 + \\
&\quad +417c^2x^2y - 221c^2xy^2 - 9c^2y^3)/1296
\end{aligned}$$

are două drepte invariante paralele $18 + c(9 \pm \sqrt{6}\,)x = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă $54(x^2 + y^2) + c(3x + y)^3 = 0$, iar în punctul singular $O(0,0)$ avem că $L_1 = 0$ şi $L_2 = (-5c^4)/648 \neq 0$, adică acest punct singular e de tip focar.

În procesul rezolvării problemei centrului au fost dezvoltate metodele reversibilităţii şi integrabilităţii Darboux. A fost demonstrată următoarea teoremă.

Teorema 2.4. *Orice sistem cubic cu puncte singulare de tip centru, două drepte invariante paralele (10) şi o cubică invariantă ireductibilă (12), este Darboux integrabil sau reversibil.*

În **Capitolul 3, Sisteme cubice cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă,** este descrisă rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă ([60], [50], [51], [59], [49], [53], [52], [55]).

Fie sistemul cubic (9) are două drepte invariante l_1 şi l_2 concurente ce se intersectează în punctul singular (x_0, y_0). La o rotaţie a sistemului de coordonate ($x \to xcos\varphi - ysin\varphi, y \to xsin\varphi + ycos\varphi$) şi rescalarea axelor ($x \to \alpha x, y \to \alpha y$), obţinem $l_1 \cap l_2 = (0, 1)$. În acest caz dreptele invariante se pot scrie sub forma

$$l_j \equiv 1 + a_jx - y = 0, \ a_j \in \mathbb{C}, \ j = 1, 2; \ a_2 - a_1 \neq 0. \tag{13}$$

Lema 2.2. *Sistemul diferenţial cubic (9) are două drepte invariante distincte de forma (13) dacă şi numai dacă se realizează următoarul set de condiţii:*

$$\begin{aligned}
&k = (a-1)(a_1 + a_2) + g, \ \ l = -b, \ \ s = (1-a)a_1a_2, \\
&m = -a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1 + a_2) - a + d + 2, \\
&n = a_1a_2(-f-2) - (d+1), \ \ p = (f+2)(a_1 + a_2) + b - c, \\
&q = (a_1 + a_2 - c)a_1a_2 - g, \ \ r = -f - 1, \ (a-1)^2 + (f+2)^2 \neq 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Cofactorii dreptelor invariante (13) sunt

$$K_j(x,y) = x + a_j y + ((a-1)a_j + g)x^2 + ((c-a_j)a_j + d + 1)xy + ((f+1)a_j + b)y^2.$$

În Teoremele 3.1 şi 3.4, pentru clasa de sisteme cubice (9) care au două drepte invariante de forma (13), au fost determinate condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a unei cubice invariante ireductibile de forma (12) ce trece prin punctul singular $(0,1)$:

$$\Phi(x,y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 - y^3 = 0, \tag{15}$$

adică cubica formează cu dreptele invariante (13) un fascicol de curbe.

Aceste condiţii sunt grupate în 49 de seturi şi pentru fiecare set se rezolvă problema centrului. Rezultatele ce ţin de problema dată sunt cuprinse în următoarele teoreme:

Teorema 3.3. *Fie $f \neq -2$ şi sistemul cubic (9) are un fascicol format din două drepte invariante (13) şi o cubică invariantă (15). Atunci punctul singular $O(0,0)$ este de tip centru dacă şi numai dacă se realizează unul dintre următoarele 16 seturi de condiţii:*

(i) $a = 1,\ b = l = s = 0,\ d = f - 1,\ k = g = (ca_1 - 4)/a_1,\ m = (4ca_1 + 3f - 13)/3,$ $n = 2r,\ p = (8 - ca_1 + 4f)/a_1,\ q = -2g,\ r = -(f+1),\ a_1^2 = 3;$

(ii) $a = 1,\ d = -2,\ f = -1,\ k = g,\ l = -b,\ m = (3c^2 - 4b^2 - 4bc - 16)/16,$ $n = -m,\ p = b,\ q = -g,\ r = s = 0;$

(iii) $d = 2a - 3,\ f = (-3)/2,\ g = 2(1-a)(b+c),\ k = (1-a)(2b+c),\ l = -b,$ $m = (9a - 4b^2 - 2bc + 2c^2 - 9)/9,\ n = (18 - 18a + 2b^2 + bc - c^2)/9, p = (2b-c)/2,$ $q = 2(a-1)(b+c),\ r = 1/2,\ s = 2(a-1)(2b-c)(b+c)/9;$

(iv) $b = (-1)/5,\ a = -3b,\ c = 18b,\ d = 14b,\ f = 11b,\ g = -2b,\ k = q = 2b,$ $l = -b,\ m = n = -9b,\ p = 21b,\ r = -6b,\ s = 0;$

(v) $b = 1/5,\ a = 3b,\ c = -18b,\ d = -14b,\ f = -11b,\ g = -2b,\ k = q = 2b,$ $l = -b,\ m = n = 9b,\ p = 21b,\ r = 6b,\ s = 0;$

(vi) $b = (-1)/5,\ d = 6b,\ f = 9b,\ p = b,\ r = -4b,\ l = n = -b,\ c = 1/10,\ a = 9c,$ $g = -c,\ m = -3c,\ q = c,\ k = (-3)/20,\ s = 0;$

(vii) $b = 1/5,\ d = -6b,\ f = -9b,\ l = -b,\ n = p = b,\ r = 4b,\ c = (-1)/10,$ $a = -9c,\ g = -c,\ m = 3c,\ q = c,\ k = 3/20,\ s = 0;$

(viii) $a = (-2f-1)/2,\ c = -da_1,\ d = -2r,\ g = (na_1)/2,\ k = 2g, n = -2f - 3,\ l = -b,$ $m = n(2a_1^2 - 3)/2,\ p = -4g,\ q = -g, r = -f - 1,\ s = 0,\ a_1 = b/(f+2);$

(ix) $a = (1 - 5f - 2f^2)/(2f+7),\ c = (1-2f)a_2,\ d = 2a + 4f + 3, g = c - (a+3)a_2, k =$ $4(a-1)a_2 + g,\ l = -b, m = [(11f+21)(2f+3)]/(2f+7), n = [(2f+3)(f-4)]/(2f+7),$ $p = (7f+9)a_2,\ q = 12a_2^3 - 3ca_2^2 - g,\ r = -f-1, s = 3(1-a)a_2^2,\ (2f+7)b^2 + (2f+$ $3)(f+2)^2 = 0,\ a_2 = b/(f+2);$

(x) $a = 3/2,\ b = (7c)/6,\ d = -3,\ f = (-3)/2,\ g = (-11c)/6,\ k = -3p,\ l = -b,$ $m = (-41)/6,\ n = 9/2,\ p = c/2,\ q = 7p,\ r = 1/2,\ s = 5/2,\ c^2 - 3 = 0;$

(xi) $a=[2-u^2(a_2^2+2a_2u-3)]/[2(u^2+1)]$, $f=(-a_2^2-2a_2u-4u^2-3)/[2(u^2+1)]$, $g=(3a_1a_2^2-3a_1-6a_2^3+2b+2c)/2$, $d=(3+2f-2a-6a_1a_2+9a_2^2)/2$, $2u^2(c+11b-4u)+u((2b+c)^2-9)+18b=0$, $k=(a-1)(a_1+a_2)+g$, $l=-b$, $s=(1-a)a_1a_2$, $m=-a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d+2$, $r=-f-1$, $n=a_1a_2(-f-2)-(d+1)$, $p=(f+2)(a_1+a_2)+b-c$, $q=(2b-u)a_1a_2-g$, $a_2=(c-2u+2b)/3$, $a_1=(4b+2c-u)/3$;

(xii) $a=5/6$, $c=6g$, $d=-3$, $f=(-13)/6$, $g=-5b$, $k=g/3$, $m=19/54$, $l=-b$, $n=37/18$, $p=(103b)/3$, $q=(25b)/3$, $r=7/6$, $s=1/18$, $108b^2-1=0$;

(xiii) $a=2/(5u^2)$, $b=(8-5u^2)/(20u)$, $c=(169u^2-76)/(10u^3)$, $d=(44-105u^2)/(20u^2)$, $f=(4-45u^2)/(20u^2)$, $g=(9u^2-4)/(2u^3)$, $k=(20-49u^2)/(10u^3)$, $l=-b$, $m=(1215u^2-508)/(25u^4)$, $n=(45u^2-24)/(10u^2)$, $p=23(4-9u^2)/(10u^3)$, $q=3(8-19u^2)/(5u^3)$, $r=-f-1$, $s=(5u^2-2)/(5u^2)$, $5u^4-40u^2+16=0$;

(xiv) $a=7(11u^2-1)/(40u^4)$, $b=(7-85u^2)/(200u^5)$, $c=(185u^2-19)/(100u^5)$, $d=(5-47u^2)/(20u^2)$, $f=(1-75u^2)/(40u^2)$, $g=(1-3u^2)/(40u^5)$, $k=(9-35u^2)/(200u^5)$, $l=-b$, $m=(23-229u^2)/(200u^6)$, $n=(105u^2-11)/(200u^6)$, $p=(37-375u^2)/(200u^5)$, $q=(65u^2-11)/(200u^5)$, $r=-f-1$, $s=(5u^2+1)/(200u^6)$, $5u^4-10u^2+1=0$;

(xv) $a=(ha_1)/(h^2-1)$, $b=(ha_1)/(h-1)^2$, $c=[h(14h-11h^2-11)a_1]/[(h^2+1)(h-1)^2]$, $f=(h-2h^2-2)/(h^2+1)$, $d=[12(39h^3-49h^2+28h+7)]/[(h^2+1)(h^2-1)^2]$, $g=[24h(27h^3-35h^2+20h+5)]/[(h^2+1)(1-h^2)^3]$, $k=(a-1)(a_1+a_2)+g$, $l=-b$, $s=(1-a)a_1a_2$, $m=-a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d+2$, $r=-f-1$, $n=a_1a_2(-f-2)-(d+1)$, $p=(f+2)(a_1+a_2)+b-c$, $q=(a_1+a_2-c)a_1a_2-g$, $a_2=(-ha_1)/(h-1)^2$, $a_1=2(h^2-h+1)/(1-h^2)$, $h^4+4h^3-6h^2+4h+1=0$;

(xvi) $a=2$, $c=[b(h-2)(1-2h)]/(h^2+1)$, $f=(h-2h^2-2)/(h^2+1)$, $b=(ha_1)/(h-1)^2$, $d=(-6h^3)/[(h^2+1)(h^2-1)^2]$, $g=[6h(10h^3+3h^2+6h-3)]/[(h^2+1)(h^2-1)^3]$, $k=(a-1)(a_1+a_2)+g$, $l=-b$, $s=(1-a)a_1a_2$, $m=-a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d+2$, $n=a_1a_2(-f-2)-(d+1)$, $r=-f-1$, $p=(f+2)(a_1+a_2)+b-c$, $q=(a_1+a_2-c)a_1a_2-g$, $a_2=(-ha_1)/(h-1)^2$, $a_1=2(h^2-h+1)/(1-h^2)$, $h^4-2h^3-2h+1=0$.

Teorema 3.6. *Fie $f=-2$ şi sistemul cubic (9) are un fascicol format din două drepte invariante (13) şi o cubică invariantă (15). Atunci punctul singular $O(0,0)$ este de tip centru dacă şi numai dacă se realizează unul dintre următoarele 8 seturi de condiţii:*

(i) $a=(12u^2-u^4-3)/(8u^2)$, $b=(4u^2-u^4-3)/(8u)$, $c=(u^4+16u^2-17)/(8u)$, $d=(u^2-4u^4-3)/(4u^2)$, $f=-2$, $g=(3u^6-5u^4+5u^2-3)/(16u^3)$, $k=(6u^6-u^8+24u^4-38u^2+9)/(64u^3)$, $l=-b$, $m=(5u^6+7u^4-65u^2+29)/(32u^2)$, $n=-d-1$, $p=b-c$, $r=1$, $q=(72u^4-3u^8-22u^6-74u^2+27)/(64u^3)$, $s=(u^{10}+u^8-26u^6+54u^4-39u^2+9)/(128u^4)$;

(ii) $c = [2b(7a-6)]/(3a-2),\ d = 2(a-1),\ f = -2,\ g = b(1-a),\ k = b(a-1),$ $l = -b,\ m = (4-5a)/2,\ n = 1-2a,\ p = b-c,\ q = [b(7a^2-9a+2)]/(3a-2),$ $r = 1,\ s = (a^2-a)/2,\ (3a-2)^2 + 16(a-1)b^2 = 0;$

(iii) $a = (8b-bu^2-2u)/(8b-2u),\ d = (24b^2-bu(u^2+18)+3u^2)/(4bu-u^2),\ c = [4b^2(u^2+8)-bu(7u^2+16)+u^2(u^2+2)]/[u^2(u-4b)],\ f = -2,\ l = -b,\ g = [(8b+u^2-2u)(8b-u^2-2u)(3u^2+4)]/[32u^2(u-4b)],\ r = 1,\ k = (a-1)(a_1+a_2)+g,\ s = (1-a)a_1a_2,\ q = (a_1+a_2-c)a_1a_2-g,\ m = -a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d+2,\ n = -d-1,\ p = b-c,$ $a_1 = (3u^3-4bu^2-16b+4u)/(4u^2),\ a_2 = (u^4-64b^2+32bu-4u^2)/[4u^2(4b-u)];$

(iv) $a = (108-u^2)/72,\ b = (u^3-36u)/432,\ f = -2,\ c = (2592-u^4-252u^2)/(432u),\ d = (-5u^2-36)/72,\ n = -d-1,\ g = (432-u^4+24u^2)/(288u),\ k = (u^6-3888u^2+93312)/(31104u),\ m = [(u^4+81u^2-324)(u^2-36)]/(1296u^2),\ q = [(u^4+168u^2-432)(u^2-36)]/(20736u),\ s = [(u^2+108)(u^2-36)^2]/373248,\ l = -b,\ p = b-c,\ r = 1;$

(v) $a = (3-2a_1a_2-a_2^2)/2,\ b = l = 0,\ c = 2a_1+3a_2,\ d = 2a-5,\ f = -2,\ g = a_1(3a_2^2+1)/2,\ k = (a_2-2a_1^2a_2+2a_1-a_2^3)/2,\ m = (2a_1^2+6a_1a_2+3a_2^2-3)/2,$ $n = -d-1,\ p = b-c,\ q = a_1(-2a_1a_2-7a_2^2-1)/2,\ r = 1,\ s = (1-a)a_1a_2;$

(vi) $a = a_1(h-2a_1),\ b = (a_1h-a_1^2-1)/h,\ c = 2(a_1^2+2ha_1-h^2+1)/h,\ d = 2a-2,$ $f = -2,\ g = (6a_1^3h-3a_1^2h^2+2a_1^2+4a_1h-h^2+2)/(2h),\ k = (2a_1^3h-8a_1^4+5a_1^2h^2-10a_1^2-2a_1h^3+4a_1h+h^2-2)/(2h), r = 1,\ m = (6a_1^3+a_1^2h-4a_1h^2+6a_1+h^3-2h)/h,$ $n = -d-1,\ p = b-c,\ q = (9a_1^2h^2-8a_1^4-6a_1^3h-10a_1^2-2a_1h^3+h^2-2)/(2h),\ l = -b,$ $a_{12} = 3a_1-h,\ s = [a_1(4a_1^4-3a_1^2h^2+6a_1^2+a_1h^3-a_1h-h^2+2)]/h;$

(vii) $a = [a_2(2a_2-2b-c)]/2,\ d = 2(a-1),\ f = -2,\ g = [6a_2(1-a)-2b+c]/4,\ k = (2a_2-2aa_2-4ab+2ac+2b-c)/4,\ l = -b,\ m = (c^2-4b^2)/4,\ n = 1-2a,\ p = b-c,\ q = [6(a-1)a_2-4ab+2ac+2b-c]/4,\ r = 1,\ s = [a_2(2ab-ac-2b+c)]/2;$

(viii) $a = [a_1(a_2^2+1)]/(a_1-a_2),\ b = (a_1^2-2a_1a_2-1)/[2(a_1-a_2)],\ f = -2,\ c = (a_1^2-2a_2^2-1)/(a_1-a_2),\ d = [2a_2(a_1a_2+1)]/(a_1-a_2),\ l = -b,\ g = [a_2(3a_1^2a_2+2a_1+a_2)]/[2(a_2-a_1)],\ k = (a-1)(a_1+a_2)+g,\ s = (1-a)a_1a_2,\ m = -a_1^2-a_1a_2-a_2^2+c(a_1+a_2)-a+d+2,$ $r = 1,\ n = -d-1,\ p = b-c,\ q = (a_1+a_2-c)a_1a_2-g.$

Teorema 3.7. *Originea sistemului de coordonate este punct singular de tip centru pentru sistemul cubic (9), care are un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează.*

Următorul exemplu ne arată că pentru existenţa centrului cerinţa ca primele trei mărimi Lyapunov să se anuleze este esenţială. Sistemul cubic

$$\dot{x} = (81y + 36x^2 - 81y^2 + 186x^2y - \sqrt{3}(135xy + 4x^3 - 18xy^2)/81,$$
$$\dot{y} = (-27x + 39xy - 5x^3 - 3xy^2 + \sqrt{3}(18x^2 + 9y^2 - 9y^3 - 23xy^2))/27$$

are un fascicol format din două drepte invariante $1 - \sqrt{3}x - y = 0,\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{9}x - y = 0$ şi o cubică invariantă ireductibilă $9(x^2 + y^2 - y^3) + \sqrt{3}x(x^2 + 9y^2) = 0$ ce trec prin punctul singular $(0,1)$, iar în punctul singular $O(0,0)$ avem că $L_1 = L_2 = 0$ şi $L_3 = (-5447680)/3 \neq 0$, adică acest punct singular e de tip focar.

În rezolvarea problemei centrului un rol determinant l-a avut metoda integrabilităţii Darboux ceea ce se confirmă de următoarea teoremă.

Teorema 3.8. *Orice sistem cubic ce are puncte singulare de tip centru, un fascicol format din două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă (12), este Darboux integrabil.*

În **Capitolul 4, Sisteme cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă de poziţie generică,** este descrisă rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică ([56], [57], [58], [54], [47], [48]).

Fie sistemul cubic (9) are două drepte invariante l_1 şi l_2, reale sau complexe conjugate ($l_2 = \overline{l_1}$), ce se intersectează în punctul singular real (x_0, y_0). Fără a restrânge generalitatea, putem considera că dreptele trec prin punctul $(0,1)$, adică ele au forma (13)

$$l_1 \equiv 1 + a_1x - y = 0,\ l_2 \equiv 1 + a_2x - y = 0, a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ a_2 - a_1 \neq 0.$$

În acest caz a_1 şi a_2 verifică sistemele de ecuaţii:

$$\begin{array}{l} s = a_1(g - k + a_1(a-1)),\ n = (f+2)a_1^2 + (b - c - p)a_1 - d - 1, \\ l = -b,\ r = -f - 1,\ q = -a_1^3 + ca_1^2 + (2 - a + d - m)a_1 - g, \end{array} \tag{16}$$

$$\begin{array}{l} F_2 \equiv (a-1)(a_1 + a_2) + g - k = 0, \\ F_3 \equiv (f+2)(a_1 + a_2) + b - c - p = 0, \\ F_4 \equiv a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 - c(a_1 + a_2) + a - d + m - 2 = 0. \end{array} \tag{17}$$

Ţinând cont de relaţile (16) şi (17), pentru sistemul (9) au fost determinate condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a unei cubice invariante ireductibile de forma (12)

$$\Phi(x,y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0,$$

unde $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0$, $a_{03} \neq -1$ şi $a_{ij} \in \mathbb{R}$. În total, au fost obţinute 93 seturi de condiţii ce asigură pentru sistemul cubic (9) existenţa a cel puţin două drepte invariante şi a unei cubice invariante ireductibile de poziţie generică (Teoremele 4.1 − 4.4). Pentru fiecare set de condiţii se rezolvă problema centrului, iar rezultatele sunt cuprinse în următoarele teoreme:

Teorema 4.5. *Fie sistemul cubic (9) posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă de poziţie generică. Atunci punctul singular $O(0,0)$ este centru dacă şi numai dacă primele trei mărimi Lyapunov se anulează.*

Teorema 4.6. *Pentru sistemul cubic (9), ce are două drepte invariante (13) şi o cubică invariantă ireductibilă (12) de poziţie generică, punctul singular $O(0,0)$ este de tip centru dacă şi numai dacă se realizează unul dintre următoarele 11 seturi de condiţii:*

(i) $a = k = r = 0,\ d = f = -1,\ g = (3c - b)/3,\ l = -b,\ m = [2(-bc-2)]/3, n = bc + 2,$ $p = (2b)/3,\ q = b,\ s = -bc - 2,\ b^2 = 3;$

(ii) $a = b^2+1$, $c = r = 0$, $d = 2(b^2-1)$, $f = -1$, $g = b(3b^2+1)$, $k = b(b^2+1)$, $l = -b$, $m = -b^2$, $n = -4b^2$, $p = -b$, $q = b(-7b^2-3)$, $s = b^2(-2b^2-1)$;

(iii) $a = [(3v-1)v]/(3v^2+1)$, $b = \sqrt{3}(1-v^2)/[(3v^2+1)(3v+1)]$, $d = (-15v^3 - 3v^2 - 13v - 1)/[(3v^2+1)(3v+1)]$, $f = (-6v^2+v-1)/(3v^2+1)$, $g = [33v^2 - 1 + \sqrt{3}(3v^2+1)(3v+1)c]/[\sqrt{3}(3v^2+1)(3v+1)]$, $k = (a-1)(a_1+a_2)+g$, $l = -b$, $m = 2 - a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1+a_2) - a + d$, $n = a_1a_2(-f-2) - (d+1)$, $p = (f+2)(a_1+a_2) + b - c$, $q = a_1^2a_2 + a_1a_2^2 - ca_1a_2 - g$, $r = -(f+1)$, $s = a_1a_2(1-a)$, $a_1 = [3v^2+6v-1+\sqrt{3}(c-a_2)(3v^2+1)]/[\sqrt{3}(3v^2+1)]$, $3(3v^2+1)(3v+1)^2(a_2^2-ca_2) + 6(15v^2+1)(v-1) - \sqrt{3}(3v+1)((3v^2+6v-1)(3v+1)a_2 - 3c(3v^2+1)(v-1)) = 0$;

(iv) $a = [(3v+1)v]/(3v^2+1)$, $b = \sqrt{3}(1-v^2)/[(3v^2+1)(3v-1)]$, $d = (-15v^3 + 3v^2 - 13v + 1)/[(3v^2+1)(3v-1)]$, $f = (-6v^2-v-1)/(3v^2+1)$, $g = [33v^2 - 1 + \sqrt{3}(3v^2+1)(3v-1)c]/[\sqrt{3}(3v^2+1)(3v-1)]$, $k = (a-1)(a_1+a_2)+g$, $l = -b$, $m = 2 - a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2 + c(a_1+a_2) - a + d$, $n = a_1a_2(-f-2) - (d+1)$, $p = (f+2)(a_1+a_2) + b - c$, $q = a_1^2a_2 + a_1a_2^2 - ca_1a_2 - g$, $r = -(f+1)$, $s = a_1a_2(1-a)$, $a_1 = [-3v^2+6v+1) + \sqrt{3}(c-a_2)(3v^2+1)]/[\sqrt{3}(3v^2+1)]$, $3(3v^2+1)(3v-1)^2(a_2^2 - ca_2) - 6(15v^2+1)(v+1) + \sqrt{3}(3v-1)((3v^2-6v-1)(3v-1)a_2 - 3c(3v^2+1)(v+1)) = 0$;

(v) $a = (2f+3t^2+1)/(2t^2)$, $d = (2f-2t^2+1)/t^2$, $g = [(2ct-4f+1)t^2+2f+1]/(2t^3)$, $k = [(2f+1+3t^2)(ct-2f)]/(2t^3)$, $l = (-f-2)/t$, $m = (-3t^2+4tcf-8f^2-2f-1)/(2t^2)$, $n = [tc(f+2) - 2f(f+3) + t^2 - 1]/t^2$, $p = [tc(f+1) + 2f(-f-2)]/t$, $q = [(4f-2tc-1)t^2 + 2tc(2f+1) - 8f^2 - 6f - 1]/2t^3$, $r = -f-1$, $s = [(2f+t^2+1)(ct-2f)]/(2t^4)$, $t = (f+2)/b$;

(vi) $a = (-10fh^2 + 72fh - 5h^2 + 36h + 108t^2)/(72t^2)$, $b = (f+2)(9-h)/(3t)$, $c = (-4fh + 36f + 5h - 36)/(6t)$, $d = (-10fh^2 + 72fh - 5h^2 + 36h - 72t^2)/(36t^2)$, $g = (-2fh^2 - h^2 + 36t^2)(4h-27)/(216t^3)$, $k = [-(86fh^3 - 1152fh^2 + 3888fh + 43h^3 - 576h^2 - 540ht^2 + 1944h + 3888t^2)]/(432t^3)$, $l = -b$, $m = [-(66fh^2 - 1008fh + 3888f + 49h^2 - 612h + 108t^2 + 1944)]/(72t^2)$, $n = (6fh^2 - 42fh + 7h^2 - 48h + 12t^2)/(12t^2)$, $p = (9fh - 72f + 5h - 36)/(6t)$, $q = [-(2fh^2 - 24fh + h^2 - 12h + 12t^2)(4h-27)]/(72t^3)$, $r = -f-1$, $s = [-(10fh^2 - 72fh + 5h^2 - 36h - 36t^2)(4h-27)h]/(1296t^4)$;

(vii) $a = 3c^2+1$, $b = l = 0$, $d = 2(9c^2-2)/3$, $f = (-5)/3$, $g = c(9c^2+1)$, $k = g$, $m = (-2)/3$, $n = (4-45c^2)/9$, $p = -c$, $q = 2c(-9c^2-1)/3$, $r = 2/3$, $s = cg$;

(viii) $a = [(3f+5)^2(f+2) + b^2(3f+4)^2]/[(3f+5)^2(f+2)]$, $c = [b(6f^2+11f+2)]/[(3f+5)(f+2)]$, $d = [2b^2(3f+4)^3 - (f+2)(5f+7)(3f+5)^2]/[(f+2)(3f+4)(3f+5)^2]$, $g = b[3b^2(3f+4)^2 - (2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)(3f+5)^3]$, $k = -b[b^2(3f+4)^3 + (f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)^2(3f+5)^3]$, $l = -b$, $m = -[b^2(3f+4)^2(9f^2+22f+12) + 3(f+1)(f+2)^2(2f+3)(3f+5)]/[(f+2)^2(3f+4)^2(3f+5)]$, $n = -[b^2(3f+4)^2(27f^2+80f+60) - 2(f+1)(f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)(3f+4)^2(3f+5)^2]$, $p = -[b(9f^2+22f+12)]/[(3f+5)(f+2)]$, $q = -b[b^2(3f+4)^2(27f^2+85f+$

$66) - (f+1)(f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(3f+5)^3(3f+4)(f+2)^2]$, $r=-f-1$, $s=-b^2[b^2(3f+4)^2(9f+14)+(f+2)(2f+3)(3f+5)^2]/[(f+2)^2(3f+5)^4]$;

(ix) $a=(4b^3-bc^2+4b+4c)/(4b+4c)$, $d=[b(2b+c)^2(2b-c)-8b(b+c)]/[2(2b+c)(b+c)]$, $f=[3c^2-(2b-c)^2]/(4b^2-c^2)$, $g=[(3b^2(2b+c)^2+4(b+c)^2)(2b-c)^2]/[16(b+c)^3]$, $k=[(2b-c)^2(b(2b+c)^2(b-2c)+4(b+c)^2)]/[16(b+c)^3]$, $l=-b$, $m=(c^2-4b^2)/4$, $n=[-(4b+c)((2b+c)^2(2b-c)b+2c(b+c))]/[2(2b+c)^2(b+c)]$, $p=-b-c$, $s=[-b(2b-c)^2((2b+c)^2(2b-c)b+4(b+c)^2)]/[16(b+c)^3]$, $r=-f-1$, $q=[((14b^2+7bc+2c^2)(2b+c)^2(2b-c)b+4(12b^2+4bc+c^2)(b+c)^2)(c-2b)]/[16(2b+c)(b+c)^3]$;

(x) $a=(9f+p^2+18)/[9(f+2)]$, $b=[p(-f-3)]/(3f)$, $c=[p(3-2f)]/(3f)$, $d=(-63f^2+2fp^2-207f-162)/[9f(f+2)]$, $g=[p(54f^3-f^2p^2+297f^2+540f+324)]/[27f(f+2)^3]$, $k=[p(p^2(f^2+10f+12)+27(2f+3)(f+2)^2)]/[27f(f+2)^3]$, $l=-b$, $m=-(18f^3+f^2p^2+81f^2+3fp^2+117f+54)/[3f^2(f+2)]$, $n=(36f^3-f^2p^2+162f^2+234f+108)/[3f^2(f+2)]$, $q=[-p(f+1)(27(2f+3)(f+2)^2-f^2p^2)]/[9f^2(f+2)^3]$, $r=-f-1$, $s=[p^2(27(2f+3)(f+2)^2-f^2p^2)]/[81f^2(f+2)^3]$;

(xi) $a=1$, $c=-2b$, $f=-1$, $g=-b$, $k=-b$, $l=-b$, $m=(16b^2-3d^2+4d+4)/16$, $n=-m$, $p=b$, $q=b$, $r=s=0$.

La rezolvarea problemei centrului un rol determinant îl are metoda integrabilităţii Darboux, fapt confirmat în următoarea teoremă.

Teorema 4.7. *Orice sistem cubic cu puncte singulare de tip centru, două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă (12) de poziţie generică, este Darboux integrabil.*

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

În lucrarea de faţă, pentru sistemele diferenţiale cubice este studiată problema deosebirii punctelor singulare de tip centru şi focar, numită problema centrului. Importanţa acestei probleme rezidă în faptul că ea are tangenţe cu problema locală a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită ce pot apărea la bifurcaţii, problemă nesoluţionată până în prezent.

Problema centrului este echivalentă cu problema integrabilităţii locale a sistemelor diferenţiale polinomiale în vecinătatea punctului singular ce are valorile proprii pur imaginare. Din aceste considerente, a fost studiată şi se dezvoltată metoda algebrică de integrare a sistemelor diferenţiale polinomiale, numită metoda Darboux de integrabilitate. Ea constă în construirea integralei prime sau a factorului integrant din soluţiile algebrice ale sistemului diferenţial polinomial. Darboux a arătat că aceasta este posibil pentru sistemele de gradul n, dacă avem $n(n+1)/2$ curbe algebrice invariante.

Aplicativitatea metodei Darboux în toate cazurile de existenţă a centrului a fost pentru prima dată arătată de către Schlomiuk [35] pentru sistemele pătratice şi de către Cozma [13] pentru sistemele cubice ce posedă două drepte invariante şi o conică invariantă. E firesc să ne întrebăm: cum de rezolvat problema centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale ce posedă un număr de curbe algebrice invariante mai mic decât $n(n+1)/2$, în particular, pentru sistemele cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă.

În teză sunt studiate relaţiile dintre curbele algebrice invariante, mărimile Lyapunov şi integrabilitatea locală, care ne conduc la două probleme fundamentale:

Problema 1. *Să se determine condiţiile de existenţă a două drepte invariante distincte şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemele diferenţiale cubice.*

Problema 2. *Să se determine toate consecutivităţile centrice pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.*

Problemele formulate au fost complet rezolvate. La realizarea cercetărilor au fost folosite metodele teoriei calitative a sistemelor dinamice, metodele algebrice de calcul computaţional, metodele de parametrizare a curbelor algebrice, metodele de integrabilitate locală. În studiul problemei centrului au fost dezvoltate două mecanisme de bază: metoda de integrabilitate Darboux şi metoda reversibilităţii.

În premieră au fost determinate sistemele diferenţiale cubice cu punct singular de tip centru sau focar care posedă două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă. Pentru aceste clase de sisteme cubice: au fost obţinute condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a centrului; a fost stabilită ciclicitatea punctului singular de tip centru sau focar; a fost demonstrată integrabilitatea Darboux sau reversibilitatea sistemelor cu puncte singulare de tip centru; au fost determinate consecutivităţile centrice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în stabilirea unor relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală, ceea ce a contribuit la dezvoltarea metodei de integrabilitate Darboux, fapt ce a permis determinarea unor noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Aceste rezultate au un rol important la realizarea studiului calitativ al sistemelor diferenţiale cubice şi ne permit să efectuăm următoarele **concluzii generale:**

– sistemele cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă pot avea cel mult trei cicluri limită de amplitudine mică bifurcate dintr-un punct singular de tip centru sau focar, ceea ce reprezintă un rezultat important în studiul problemei ciclicităţii (Cap. 2, 2.2; Cap. 3, 3.4; Cap. 4, 4.7);

– sistemele cubice cu punct singular de tip centru, care au două drepte invariante şi o cubică invariantă, sunt Darboux integrabile în cazurile când aceste soluţii algebrice formează un fascicol de curbe sau ele se află în poziţia generică (Cap. 3, 3.2, 3.4; Cap. 4, 4.7);

– sistemele cubice cu punct singular de tip centru, care au două drepte invariante paralele şi o cubică invariantă, sunt Darboux integrabile sau reversibile (Cap. 2, 2.3);

– în sistemele cubice, ciclicitatea punctului singular de tip centru sau focar, depinde de poziţia relativă a curbelor algebrice invariante (Cap. 3, 3.1, 3.3; Cap. 4, 4.1 – 4.4.).

Rezultatele, ce ţin de problema centrului, obţinute pentru sistemele diferenţiale cubice reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită. În baza concluziilor prezentate putem **recomanda următoarele:**

– să se studieze problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice care admit soluţii algebrice, a căror sumă a gradelor este egală cu un număr dat;

– să se folosească invarianţii algebrici în studierea problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă curbe algebrice invariante;

– rezultatele cercetării pot fi folosite în studiul calitativ al sistemelor diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă, în studiul integrabilităţii unor modele matematice care descriu procese sociale şi naturale.

– rezultatele obţinute în teză pot fi incluse în programele cursurilor opţionale universitare ţinute studenţilor şi masteranzilor la facultăţile cu profil real sau tehnic.

BIBLIOGRAFIE

1. AMEL'KIN, V.V., LUKASHEVICH, N.A., SADOVSKII, A.P. *Non-linear oscillations in the systems of second order.* Minsk: Belarusian Univ. Press, 1982. 208 p.
2. BAUTIN, N.N. On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or centre type. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 1954, vol. 100, pp. 397–413. ISSN 0002–9947.
3. BOTHMER, H.-C., KRÖKER, J. Focal values of plane cubic systems. In: *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2010, vol. 9, pp. 319–324. ISSN 1575-5460.
4. CAO, J., LLIBRE, J., ZHANG, X. Darboux integrability and algebraic limit cycles for a class of polynomial differential systems. In: *Science China Mathematics.* 2014, vol. 57, no. 4, pp. 775–794. ISSN 1674–7283.
5. CHAVARRIGA, J., GIACOMINI, H., GINÉ J. An improvement to Darboux integrability theorem for systems having a center. In: *Appl. Math. Letters.* 1999, vol. 12, pp. 85–89. ISSN 0893–9659.
6. CHRISTOPHER, C., LI, C,. *Limit Cycles of Differential Equations. Series: Advanced Courses in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. 170 p. ISBN 978–3–7643–8410–4.
7. CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J., PANTAZI, C., ZHANG, X. Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems. In: *J. Phys. A.* 2002, vol. 35, no. 10, pp. 2457–2476. ISSN 1751–8113.
8. CIOBANU, M., ROTARU, T. 130 de ani de zbucium pentru soluţionarea problemei lui Poincaré despre centru şi focar. In: *Academos.* 2013, vol. 2, pp. 13–21. ISSN 1857–0461.
9. COZMA, D. Darboux integrability and rational reversibility in cubic systems with two invariant straight lines. In: *Electronic Journal of Differential Equations.* 2013, vol. 2013, no. 23, pp. 1–19. ISSN 1072–6691.
10. COZMA, D. The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant conic. In: *Nonlinear Differ. Equ. and Appl.* 2009, vol. 16, pp. 213–234. ISSN 1021–9722.
11. COZMA, D. The problem of the center for cubic systems with two homogeneous invariant straight lines and one invariant conic. In: *Annals of Differential Equations.* 2010, vol. 26, no. 4, pp. 385–399. ISSN 1002–0942.

12. COZMA, D. Center problem for cubic systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant conic. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2012, no. 1, pp. 32–49. ISSN 1024–7696.
13. COZMA, D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics*. Chişinău: Ştiinţa, 2013. 240 p. ISBN 978–9975–67–906–0.
14. COZMA, D., ŞUBĂ, A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. In: *Sci. Annals of the "Al.I.Cuza" University, Mathematics*. 1998, vol. XLIV, s.I.a, pp. 517–530. ISSN 1221–8421.
15. COZMA, D., ŞUBĂ, A. Partial integrals and the first focal value in the problem of centre. In: *Nonlin. Diff. Equ. and Appl.* 1995, vol. 2, pp. 21–34. ISSN 1021–9722.
16. DARBOUX, G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. In: *Bull. Sci. Math.* 1878, pp. 60–96; 124–144; 152–200.
17. DUKARIC, M., GINÉ, J., Integrability of Lotka–Volterra planar complex cubic systems. In: *Inter. Journal of Bifur. and Chaos*. 2016, vol. 26, no. 01, 1650002. ISSN 0218–1274.
18. FERČEC, B., MAHDI, A. Center conditions and cyclicity for a family of cubic systems: computer algebra approach. In: *Mathematics and Computers in Simulation*. 2013, vol. 87, pp. 55–67. ISSN 0378–4754.
19. GAIKO, V.A. *Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem*. Kluwer Academic Publishers, 2003. 203 p. ISBN 978–1–4419–9168–3.
20. GINÉ, J. On some open problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem. In: *Chaos, Solitons and Fractals*. 2007, vol. 31, pp. 1118–1134. ISSN 0960–0779.
21. GINÉ, J., ROMANOVSKI, V.G. Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quintic systems. In: *Nonlinear Analysis*. 2010, no. 3, pp. 2100–2105. ISSN 1468–1218.
22. HILBERT, D. Mathematische probleme. In: *Nachr. Ges. Wiss., editor, Second Inter. Congress Math*. Paris, 1900, Göttingen Math.–Phys. Kl. 1900, p. 253–297.
23. HILL, J.M., LLOYD, N.G., PEARSON, J.M. Centres and limit cycles for an extended Kukles system. In: *E. J. of Diff. Equ.* 2007, no. 119, pp. 1–23. ISSN 1072–6691.
24. KOOIJ, R.E, CHRISTOPHER, C.J. Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems. In: *Appl. Math. Lett.* 1993, no. 4, pp. 51–53. ISSN 0893–9659.
25. LEVANDOVSKYY, V., PFISTER, G., ROMANOVSKI, V.G. Evaluating cyclicity of cubic systems with algorithms of computational algebra. In: *Communications in Pure and Applied Analysis*. 2012, vol. 11, no. 5, pp. 2023–2035. ISSN 1097–0312.
26. Li, C., LIU, C., YANG, J. A cubic system with thirteen limit cycles. In: *J. Diff. Eqns.* 2009, vol 246, pp. 3609-–3619. ISSN 0022–0396.
27. LLOYD, N.G., PEARSON, J.M. Symmetry in planar dynamical systems. In: *J. Symbolic Computation*. 2002, vol. 33, pp. 357–366. ISSN 0747–7171.
28. LYAPUNOV, A.M. *The general problem of the stability of motion*. Gosudarstv. Izdat. Tech. Lit., 1950. 471 p.
29. POINCARÉ, H. Mémoire sur les coubes défines par les équations différentielles. In: *J. de Mathématiques*. 1881, vol. 7, pp. 375–422; 1882, vol. 8, pp. 251–296; Oeuvres de Henri Poincaré, 1951, vol. 1, Paris: Gauthier–Villars, pp. 3–84.
30. POPA, M.N., PRICOP, V.V. *The center-focus problem: algebraic solutions and hypoteses*. Chişinău, Institute of Math. and Informatics, 2018. 256 p. ISBN 978–9975–62–416–9.
31. POPA, M.N., PRICOP, V.V. Applications of algebraic methods in solving the center-focus problem. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2013, vol. 71, no. 1, pp. 45–71. ISSN 1024–7696.

32. ROMANOVSKI, V.G. Time-reversibility in 2-dimensional systems. In: *Open Systems and Infor. Dynamics*. 2008, vol. 15, no. 4, pp. 359–370. ISSN 1230–1612.
33. ROMANOVSKI, V.G and SHAFER, D.S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*. Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009. 348 p. ISBN 978–0–8176–4726–1.
34. SADOVSKII, A.P. *Polynomial ideals and varieties*. Minsk, BGU, 2008. 199 p.
35. SCHLOMIUK, D. Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields. In: *Bifurcations and periodic orbits of vector fields (D.Schlomiuk, ed.)*. Kluwer Academic Publishes, 1993, pp. 429–467. ISBN 978–90–481–4303–0.
36. SIBIRSKY, C.S. The number of limit cycles in the neighborhood of a singular point. In: *Differ. Equ.* 1965, vol. 1, no. 1, pp. 51–66. ISSN 0374–0641.
37. SIBIRSKY, C.S. *Algebraic invariants of differential equations and matrices*. Chişinău: Ştiinţa, 1976. 268 p.
38. ŞUBĂ, A. Partial integrals, integrability and the center problem. In: *Differ. Equ.* 1996, vol. 32, no. 7, pp. 884–892. ISSN 0374–0641.
39. TEIXEIRA, M.A., YANG, J. The center-focus problem and reversibility. In: *Journal of Diff. Equations*. 2001, vol. 174, pp. 237–251. ISSN 0022–0396.
40. VULPE, N.I. Affine-invariant conditions for topological distinction of quadratic systems in the presence of a center. In: *Differ. Equ.* 1983, no. 3, pp. 371–379. ISSN 0374–0641.
41. ZHANG, X. *Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analysis*. Singapure, Springer Nature Singa- pure, 2017. 390 p. ISBN 978–981–4225–6.
42. ŻOŁĄDEK, H. The solution of the center-focus problem. Preprint, 1992. 63 p.
43. ŻOŁĄDEK, H. On certain generalization of the Bautin's theorem. In: *Nonlinearity*, 1994, vol. 7, pp. 273–279. ISSN 0951–7715.
44. ŻOŁĄDEK, H. Remarks on: The classification of reversible cubic systems with center. In: *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1996, vol. 8, no. 2, pp. 335–342. ISSN 1230–3429.
45. YU, P., HAN, M. Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem. In: *Inter. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 2005, no. 7, pp. 2191–2205. ISSN 0218–1274.
46. ŞUBĂ, A., COZMA, D. Solution of the problem of center for cubic differential systems with three invariant straight lines in generic position. In: *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2005, vol. 6, p. 45–58. ISSN 1575–5460.

LISTA PUBLICAŢIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI

Articole în reviste:

47. **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Annals of the University of Craiova, Math. and Computer Science Series*. 2018, vol. 45, no. 2, pp. 271–282. ISSN 1223-6934.
48. **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Bukovinian Math. Journal*. 2018, vol. 6, no. 3–4, pp. 53–62. ISSN 2309–4001.
49. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a class of cubic differential systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2018, vol. 86, no.1, pp. 120–138. ISSN 1024–7696.
50. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *ROMAI Journal*. 2017, vol. 13, no. 2, pp. 39–54. ISSN 1841–5512.

Articole în culegeri ştiinţifice:

51. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a cubic differential system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Proceedings of the Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova*, June 28 - July 2, 2017, Chişinău, pp. 269–272. ISBN 978–9975–71–915–5.
52. **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic differential system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Tendinţe contemporane ale dezvoltării stiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, ediţia VI a conf. şt. intern. a doctoranzilor*, 15 iunie, 2017. Chisinău, pp. 20–25. ISBN 978–9975–108–16–4.
53. **DASCALESCU, A.** Draboux integrability for cubic differential systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Tendinţe contemporane ale dezvoltării stiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, ediţia V a conf. şt. intern. a doctoranzilor*, 25 mai, 2016. Chişinău, pp. 306–311. ISBN 978–9975–993–83–4.

Teze în lucrările conferinţelor:

54. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for cubic systems with two invariant straight lines and one invariant cubic in generic position. In: Abstracts of the International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education", June 24–26, 2019, Chişinău, pp. 23–24. ISBN 978–9975–149–17–4.
55. **DASCALESCU, A.** Integrability conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Modern problems of mathematics and its applications in natural sciences and information technologies: intern. sci. conf.*, September 17-19, 2018. Chernivtsi, Ukraine, pp. 20. http://fmi50.pp.ua
56. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** The problem of the center for a cubic system having two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Abstracts of the XVIII International Scientific Conference on Differential Equations "Erugin's Readings–2018"*, May 15–18, 2018, Grodno, Belarus, pp. 102–103. ISBN 978-985-7160-08-2.
57. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Abstracts of the 26 Conference on Applied and Industrial Mathematics*, September 20 – 23, 2018, Chişinău, TUM. pp. 36–37.
58. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Darboux integrability for a class of cubic differential systems with two straight lines and one cubic algebraic solutions. In: *Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist V. Belousov: inter. conf. on Mathematics*, April 19 – 21, 2018, Bălţi, pp. 33.
59. COZMA, D., **DASCALESCU, A.**, REPEŞCO, V. Center conditions and phase portraits in a cubic differential system with invariant algebraic curves. In: *Abstarcts of the 25th Conference on Applied and Industrial Mathematics*, September 14 – 17, 2017. Iaşi, România, pp. 35–36. http://www.romai.ro
60. COZMA, D., **DASCALESCU, A.** Center conditions for cubic systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic curve. In: *Abstracts of the International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education"*, June 23–26, 2016, Chişinău, pp. 25–26. ISBN 978–9975–71–794–6.
61. **DASCALESCU, A.** Condiţii de integrabilitate pentru un system diferenţial cubic ce posedă o cubică invariantă. In: *Ştiinţe ale naturii şi exacte, ştiinţe juridice şi economice: sesiunea naţională de comunicări ştiinţifice studenţeşti*, 21–22 aprilie 2016, USM. Rezumatele comunicărilor, Chişinău, 2016, pp. 90–92. ISBN 978–9975–71–768–7.

ADNOTARE

Dascalescu Anatoli, "Integrabilitatea sistemelor diferenţiale cubice cu drepte şi cubice invariante". Teză de doctor în ştiinţe matematice. Chişinău, 2019

Structura tezei: teza constă din introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie din 150 titluri, 135 pagini de text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 15 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte-cheie: sistem diferenţial cubic, curbă algebrică invariantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux, consecutivitate centrică, problema ciclicităţii.

Domeniul de studiu: teoria calitativă a sistemelor dinamice, integrabilitatea sistemelor diferenţiale polinomiale.

Scopul lucrării: determinarea condiţiilor de existenţă a centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante distincte şi o cubică invariantă ireductibilă.

Obiectivele cercetării: determinarea condiţiilor de existenţă a două drepte invariante şi a unei cubice invariante ireductibile pentru sistemul cubic cu punct singular de tip centru sau focar; studierea integrabilităţii sistemelor; rezolvarea problemei centrului şi problemei ciclicităţii în prezenţa a două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: a fost rezolvată problema centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă; a fost stabilită ciclicitatea punctului singular de tip centru sau focar; au fost determinate consecutivităţile centrice. A fost demonstrat că orice sistem cubic ce are punct singular de tip centru, două drepte invariante şi o cubică invariantă ireductibilă, este Darboux integrabil sau reversibil.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în stabilirea unor relaţii eficiente dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea locală, ceea ce a contribuit la dezvoltarea metodei de integrabilitate Darboux, fapt ce a permis determinarea unor noi seturi de condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu două drepte invariante şi o cubică invariantă.

Semnificaţia teoretică a lucrării: a fost dezvoltată metoda de investigare a problemei centrului care se bazează pe relaţiile dintre existenţa curbelor algebrice invariante, mărimile focale şi integrabilitatea Darboux.

Valoarea aplicativă a lucrării: pentru sistemele diferenţiale cubice au fost obţinute rezultate noi ce ţin de problema centrului şi ciclicităţii, care reprezintă o etapă importantă în rezolvarea problemei a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: rezultatele obţinute în teză pot fi aplicate în investigaţiile problemei integrabilităţii şi a problemei ciclurilor limită pentru sistemele diferenţiale polinomiale; pot servi drept suport pentru tezele de master şi unele cursuri opţionale universitare ţinute studenţilor şi masteranzilor; pot fi folosite în studiul unor modele matematice ce descriu procese sociale şi naturale.

АННОТАЦИЯ

Даскалеску Анатолий, "Интегрирование кубических дифференциальных систем с алгебраическими инвариантными кривыми первого и третьего порядка". Диссертация на соискание учёной степени доктора математических наук. Кишинэу, 2019

Структура работы: введение, четыре главы, выводы и рекомендации, библиография из 150 наименований, 135 страниц основного текста. Полученные результаты были опубликованы в 15 научных работах.

Ключевые слова: кубическая дифференциальная система, алгебраическая инвариантная кривая, проблема центра, интегрируемость в смысле Дарбу, центрическая последовательность, проблема цикличности.

Область исследования: качественная теория динамических систем, интегрируемость полиномиальных дифференциальных систем.

Цель работы: определение условий существования центра для кубической дифференциальной системы с особой точкой типа центра или фокуса при наличии двух инвариантных прямых и инвариантной кривой третьего порядка.

Задачи исследования: нахождение условий существования двух инвариантных прямых и инвариантной кривой третьего порядка в кубической дифференциальной системы с особой точкой типа центра или фокуса; определение условий интегрируемости систем; решение проблемы центра и проблемы цикличности для кубических систем с двумя инвариантными прямыми и инвариантной кривой третьего порядка.

Новизна и научная оригинальность: для кубической дифференциальной системы с двумя инвариантными прямыми и инвариантной кривой третьего порядка была решена проблема центра и была установлена цикличность особой точки типа центра или фокуса. Было доказано, что любая кубическая система с особой точкой типа центра при наличии двух инвариантных прямых и инвариантной кривой третьего порядка интегрируема в смысле Дарбу или имеет ось симметрии.

Главная решенная научная задача состоит в установлении эффективных соотношении между алгебраическими инвариантными кривыми, фокусными величинами и локальной интегрируемостью, что способствовало развитию метода интегрируемости в смысле Дарбу, что позволило получить новые необходимые и достаточные условия центра для кубических систем с двумя инвариантными прямыми и инвариантной кривой третьего порядка.

Теоретическая значимость работы: был разработан метод исследования проблемы центра, основанный на сооотношениях между алгебраическими инвариантными кривыми, фокусными величинами и интегрируемостью в смысле Дарбу.

Практическая значимость работы: были полученны новые результаты по проблеме центра и проблеме цикличности, которые являются важным шагом в решении 16-й проблемы Гильберта о предельных циклах.

Внедрение научных результатов: полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении проблемы интегрируемости и проблемы предельных циклов полиномиальных систем, при разработке тем магистерских работ и некоторых спецкурсов для физико-математических специальностей, при исследовании некоторых математических моделей, описывающих социальные и природные процессы.

ANNOTATION

Dascalescu Anatoli, "Integrability of cubic differential systems with invariant straight lines and invariant cubics". PhD Thesis in Mathematical Sciences. Chişinău, 2019

Thesis structure: introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, bibliography of 150 titles, 135 pages of main text. The obtained results were published in 15 scientific papers.

Keywords: cubic differential system, invariant algebraic curve, the problem of the center, Darboux integrability, center sequence, the problem of cyclicity.

Domain of research: qualitative theory of dynamical systems, integrability of polynomial differential systems.

Aim of the research: to determine the center conditions for the cubic differential system with two distinct invariant straight lines and one irreducible invariant cubic.

Objectives of the research: to obtain the conditions for the existence of two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic for the cubic differential system with a singular point of a center or a focus; to study the integrability of the systems; to solve the problem of the center and the problem of cyclicity for the cubic systems with two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic.

Novelty and scientific originality: the problem of the center, the problem of cyclicity and the problem of center sequences were solved for cubic differential systems with two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic. It was proved that every cubic differential system with a center, having two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic, is Darboux integrable or reversible.

The main scientific problem solved consists in establishing of some efficient relations between invariant algebraic curves, focus quantities and local integrability, which contributed to the development of the Darboux integrability method. This made possible to obtain new sets of necessary and sufficient center conditions for cubic differential systems with two invariant straight lines and one invariant cubic.

The theoretical significance of the work: it was elaborated an efficient method in solving the problem of center based on relations between the existence of algebraic invariant curves, focus quantities and Darboux integrability.

The practical value of the work: the results obtained for cubic differential systems concerning the problem of the center and the problem of cyclicity represent an important step in solving the 16th Hilbert problem about limit cycles.

Implementation of the scientific results: the obtained results can be applied in investigations of the problem of integrability and the problem of limit cycles for polynomial differential systems; can serve as support for Master Thesis and some optional university courses for students and master students; can be used in the study of mathematical models which describe some social and natural processes.

DASCALESCU ANATOLI

INTEGRABILITATEA SISTEMELOR DIFERENŢIALE CUBICE CU DREPTE ŞI CUBICE INVARIANTE

111.02. ECUAŢII DIFERENŢIALE

Rezumatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar: 18.11.2019	Formatul hârtiei: 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tirajul 35 ex.
Coli de tipar: 2	Comanda Nr. 18

Tipografia UST, Chişinău, str. Gh. Iablocikin, 5, MD 2069